Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Лесняк Любовь Ивановна

ВЛИЯНИЕ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ НА ОСТАТОЧНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ И РЕОЛОГИЮ ПОЛИМЕРОВ И КОМПОЗИТОВ НА ИХ ОСНОВЕ

1.4.7. Высокомолекулярные соединения

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
д. т. н., проф.
Б. М. Языев

Ростов–на–Дону — 2021

Оглавление

Введение **4**

1 Состояние вопроса. Обзор основных соотношений и методов решения задач теории упругости и ползучести **8**

1.1 Краткий исторический обзор развития вопросов исследования полимеров 8

1.2 Вязкоупругость 10

1.3 Основные уравнения в тензорной форме. Уравнение Максвелла-Гуревича 16

1.4 О константах уравнения связи и понятие линеаризации уравнений связи 20

1.5 Основные уравнения механики деформируемого твёрдого тела, теории упругости, пластичности и ползучести 22

1.6 Переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке 26

2 Методика определения реологических параметров на основе обработки опытных результатов **27**

2.1 Методика определения физико-механических параметров по кривым ползучести полимера 27

2.2 Определение физико-механических параметров полимера 33

2.3 Методика расчета задач с учётом ползучести материала 37

2.4 Выводы по главе 38

3 Основные разрешающие уравнения численных методов для определения НДС полимерного тела **40**

3.1 Основные уравнения метода конечных элементов и метода конечных разностей . . 41

3.1.1 Одномерный симплекс-элемент метода конечных элементов 41

3.1.2 Аппроксимация функции методом конечных разностей 42

3.2 Определение переменного во времени температурного поля 44

3.2.1 Решение с помощью метода конечных разностей 45

3.2.2 Решение с помощью метода конечных элементов 46

3.2.3 Сравнение результатов, полученных численными методами 48

3.3 Определение напряжённо-деформированного состояния неоднородного цилиндра с учётом температурного нагружения и деформациями ползучести 49

3.3.1 Решение в напряжениях с помощью метода конечных разностей 50

3.3.2 Решение в перемещениях с помощью метода конечных элементов 52

3.4 Выводы по главе 56

4 Моделирование напряжённо-деформированного состояния вращающегося тела **57**

4.1 Исследование вращения цилиндра из ЭДТ–10 при больших частотах 57

4.1.1 Задача 4.1. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении . . . 57
4.1.2 Задача 4.2. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры . . . 59
4.1.3 Задача 4.3. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры и наведённой неоднородности материала . . . 59
4.1.4 Задача 4.4. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры, наведённой неоднородности материала и реологии . . . 60
4.1.5 Задача 4.5. Моделирование НДС цилиндра при изготовлении изделия . . . 62
4.1.5.1 Постановка задачи . . . 62
4.1.5.2 Анализ полученных результатов . . . 62
4.2 Исследование вращения цилиндра из безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов при больших частотах . . . 92
4.2.1 Задача 4.6. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры, наведённой неоднородности материала и реологии . . . 92
4.2.2 Задача 4.7. Моделирование НДС цилиндра при изготовлении изделия . . . 95
4.3 Исследование вращения цилиндра из ЭДТ–10 при малых частотах и большом градиенте температур . . . 98
4.4 Выводы по главе . . . 105

Заключение **106**

Библиографический список **107**

Приложения **116**

А Свидетельства регистрации программ ЭВМ **117**

Б Внедрение результатов диссертации **119**

Введение

В настоящее время полимерные материалы всё чаще находят применение в качестве конструкционного материала, воспринимающего значительные внешние нагрузки.

Отдельно необходимо отметить полимерные изделия, вращающиеся вокруг одной из своих осей. Примерами таких изделий могут быть валы, оболочки вращения и т. д. При наличии центробежной силы возможно перераспределение в композите твердых частиц в области внешней грани, что позволяет создавать конструкции с заранее заданными свойствами, к примеру, изменением модуля упругости изделия по радиусу.

Начиная с конца XX века зарубежными учёными (Матти Хольцберг, компания Polimotor) ведутся разработки пластиковых двигателей для автомобилей. Мощность пластикового двигателя при этом может достигать 300 л. с., а масса снижена до 69 кг (оригинальный мотор выдавал 88 л. с. при массе в 188 кг). Сильная зависимость полимера от температуры отражается на фактическое напряженно-деформированное состояние (далее — НДС) полимерных изделий (например, после отверждения полимерного связующего), в частности, для цилиндрической формы, по толщине.

Отличительным свойством полимеров является реология, развитие которой происходит не в фазе с напряжениями. Существует много различных уравнений состояния, учитывающих наличие пластических деформаций или деформаций ползучести, в том числе, используемых в многочисленных комплексах, в основе которых лежит метод конечных элементов (далее — МКЭ). Наиболее точным является обобщённое нелинейное уравнение Максвелла в форме, предложенной Гуревичем (далее — уравнение Максвелла–Гуревича), поскольку учитывает обратимые во времени деформации ползучести.

Используемые учёными программные комплексы по расчёту конструкций и их элементов (ANSYS, Abaqus, Solid Works и др.) основаны на МКЭ и не содержат какие-либо уравнения связи, подходящие для описания обратимых деформаций ползучести полимеров. Таким образом, полноценное описание работы полимерных изделий требует написание программных модулей для учёта обратимых деформаций на основе уравнения Максвелла-Гуревича.

Вопрос расчета изделий из полимерных материалов с учётом инерционных сил и изменения их физико-механических параметров от температурного воздействия остаётся весьма *актуальным.*

Степень разработанности темы. Анализ проведённого литературного обзора по исследованию НДС полимерных изделий показал, что преимущественно используются физические соотношения на основе линеаризованных уравнений, что не позволяет произвести моделирование работы полимерных конструкций в условиях, приближенных к реальным. Решение данных задач может быть получено лишь при использовании нелинейных физических соотношений. Ряд соотношений был получен феноменологически, путём некоторых обобщений линейных соотношений в трудах учёных М. И. Розовского, А. А. Ильюшина с коллегами, А. К. Малмейстером и др. В случае ещё более строго подхода требуется применение физической теории, основывающейся на исследовании молекулярной природы деформации рассматриваемых сред. Практическим вопросам использования полимеров для создания

конструкций и последующему определению НДС посвятили свои труды А. Л. Якобсен, В. С. Ромейко, А. Н. Шестопал, А. А. Персион, J. Hessel и др.

Цель работы — прогнозирование остаточных напряжений, возникающих в полимерных изделиях, вращающихся с переменной частотой в неизотермических условиях с учётом изменения физико-механических свойств материала от градиента температурного поля.

Задачи работы:

1. Разработка методики определения физико–механических параметров полимера (упругих и высокоэластических) на основе математической обработки кривых ползучести полимера.

2. Получение универсальных разрешающих уравнений для решения задачи плоского деформированного состояния полимерного цилиндра с учётом инерционных сил и косвенной неоднородности.

3. Теоретическое исследование реологии цилиндрических образцов из ряда полимеров: эпоксидного связующего ЭДТ–10, безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло-эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite) в условиях температурного и силового воздействий.

4. Апробация полученных решений путём использования нескольких независимых методов: метода конечных разностей (далее — МКР) и метода конечных элементов (далее — МКЭ) — с последующим анализом и сопоставлением результатов.

5. Оценка влияния частоты вращения полимерного цилиндра на его НДС в температурном поле.

6. Определение остаточных напряжений в полимерном цилиндре, подвер-женном циклическому воздействию температурного поля.

Научная новизна. В настоящей работе впервые:

1. Получена кинетика развития высокоэластических деформаций полимеров в зависимости от различных частот вращения и температуры образца.

2. Установлено, что ползучесть полимерных материалов адекватно описывается обобщённым уравнение Максвелла–Гуревича с экспоненциальным ядром релаксации, разработанным и предложенным не только для полимеров, но и материалов широкого спектра.

3. Разработана методика определения физико–механических параметров полимеров (упругих и релаксационных) на основе математической обработки экспериментальных кривых ползучести, в частности эпоксидного связующего ЭДТ–10, безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло-эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite) в условиях температурного и силового воздействий.

4. Приведены качественная и количественная оценки остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления образцов при вращении с учетом переменного во времени температурного поля.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что

1. Проведено исследование НДС вращающихся цилиндров с учётом влияния градиента температурного поля и, как следствие, наведённой неоднородности материала.

2. Предложен комплексный подход по оптимизации математической модели определения НДС цилиндрических полимерных тел.

Практическое значение работы:

1. Совместно с группой компаний АКСстрой (далее — ГК АКСстрой) внед-рены результаты исследования при расчёте и прогнозировании напряжённо-деформированного состояния полимерных оболочек, используемых в качестве опалубки при изготовлении винтовых свай. Полимерные оболочки подвергаются температурному воздействия, приводящему к изменению их физико-механических параметров для упрощения процесса формования. Внедрение результатов теоретических изысканий позволило внести корректировки в технологию изготовления оболочек, в результате чего экономический эффект составил до 20 тыс. руб. на изделие, что суммарно составляет до 2 млн. руб. в год.

2. Получено свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Программа производит расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения.

Методология и методы исследования. Использованы аналитические и численных методы, такие как МКЭ и метод конечных разностей (далее — МКР) с применением современного математического пакета Octave (MatLab).

Положения, выносимые на защиту:

1. Совершенствование существующей методики определения параметров уравнения состояния на основе математического анализа экспериментальных данных испытаний образцов на ползучесть и представления физико-механических параметров материала как функции температуры.

2. Результаты определения физико-механических параметров полимеров и композитов как аппроксимирующей степенной функции температуры второго порядка.

3. Результаты определения НДС полимерного изделия цилиндрической формы в условиях: переменного температурного поля, наличия косвенной неоднородности, различных частотах вращения образца.

4. Доказано, что направление температурного градиента во вращающихся полимерных цилиндрических изделиях приводит к значительному изменению НДС, что влияет на величину остаточных напряжений.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

1. Проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений.

2. Сопоставлением полученных результатов решения частных задач с рядом решений независимых авторов.

3. Анализ совпадения результатов решения задач, полученных при помощи нескольких численных методов (МКР и МКЭ).

Апробация работы. Основные моменты работы отражены в печатных и электронных публикациях, из них в 7-ми изданиях, входящих в перечень рецензируемых изданий,

рекомендованных ВАК РФ и/или входящих в международные базы цитирования Scopus/Web of Science [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], а также в 5-ти материалах конференций [9, 10, 11, 12, 13] (материалы XIII международной научно-практической конференции, Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Нальчик; Строительство-2014, Ростовский государственный строительный университет, Ростов-на-Дону; Строительство-2017, Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону).

Внедрение результатов работы. Имеется 2 свидетельства о регистрации программы ЭВМ [14, 15], а также внедрение в ГК АКСстрой

Структура и объём работы. Работа состоит из введения, четырёх глав, основных выводов и библиографического списка. Изложена на 119 страницах машинописного текста и содержит 60 рисунков и 4 таблицы.

Публикации. Основные положения диссертационной работы опубликованы в 17 печатных и электронных работах, из них в ведущих рецензируемых изданиях, входящих в перечень ВАК РФ — 4, в журналах, входящих в международные базы цитирования Scopus и Web of Science — 7, в других периодических изданиях — 6, получено 2 свидетельства о регистрации программы для ЭВМ.

Глава 1. Состояние вопроса. Обзор основных соотношений и методов решения задач теории упругости и ползучести

1.1 Краткий исторический обзор развития вопросов исследования полимеров

В настоящее время полимерные материалы используются практически во всех отраслях народного хозяйства и не только. Так, в машиностроительной отрасли полимерные материалы находят своё применение как радиоизоляционные материалы, а также материалы, обладающие замечательными электро-, тепло- и звукоизоляционными свойствами. Кроме того, они обладают хорошими защитными функциями от многих агрессивных воздействий, в том числе и химического происхождения. Возрастает использование полимеров в качестве новой для них роли — конструкционные материалы, используемые в качестве силовых элементов в различных конструкциях.

Широкое применение также находят гомогенные (однородные) полимерные материалы, обладающими изотропными свойствами в элементах конструкций под относительно небольшим нагружением, таких как трубы водоснабжения и канализования, часто изготавливаемые из полиэтилена высокой плотности, а также лопасти маломощных вентиляторов [16, 17, 18] и т. д.

Для использования в конструкциях и их элементов под значительным нагружением, так где требуется высокая удельная прочность, к примеру, гоночные болиды, стеклопластиковые вставки ракет или надводных кораблей [19, 20, 21], в штампах из дельта-древесины [22, 23] находят своё применение армированные полимеры, являющиеся анизотропными материалами.

Если же говорить об армирующих элементах, то в качестве этой роли могут выступать весьма разнообразные вещества: стеклянные волокна используются в стеклопластиковых изделиях, древесный шпон находит применение в дельта-древесине и т. д.

Как указано в работах [21, 24, 25, 26, 27], именно стеклопластики, а, если быть более точными, — армированные стеклопластики [28, 29, 30, 31, 32, 33] показывают наибольшие прочностные и жёсткостные характеристики. Однако, эта классификация наиболее часто применяется в исследованиях механики. Если же посмотреть на данный вопрос с другой точки зрения [34, 35], то физико-механические свойства композитов зависят от множества факторов: свойства армирующих элементов, а также их расположение и ориентация, а также их место в полимерных связях.

Особую роль на композиты оказывает именно связующее; механическая роль и свойства высокомолекулярных соединений исследована в значительной мере, особенно с качественной точки зрения [36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46]. Одной из самых заметных особенностей полимерных связующих является наличие выраженных обратимых высокоэластических деформаций, при этом не совпадающих с напряжениями по фазе. Ещё одной особенностью полимеров является гораздо бóльшая, чем у иных материалов (дерево, металл, бетонн и т.д.) зависимость физико-механических параметров (упругих и высокоэластических) от

многочисленных факторов: наличие температурного градиента, скорость приложения внешней нагрузки и длительность её воздействия и т. д.

Создание любой конструкции происходят в обязательном порядке с применением инженерных конструкций, главным образом при помощи современных пакетов прикладных программ, в основе которых лежат численные методы (наиболее распространённым является МКЭ — метод конечных элементов). Использование численных методов расширяет горизонты в плане, во-первых, учёта неоднородности материалов, во-вторых, повышения точности производимых вычислений и максимального приближения используемых расчётных схем к работе реальных конструкций. При этом в основе программных комплексов должны лежать не только уравнения механики деформируемого твёрдого тела (теории упругости, пластичности и ползучести), но и уравнения механики полимеров, которые реализуются в специальных модулях, отвечающих за моделирование и расчёт изделий из полимерных материалов. Тем не менее, дальнейшее развитие механики полимеров, являясь частью механики сплошных сред, полностью опирается на её аппарат механики, для чего необходимо определить выражения, связывающие напряжения и вызванные ими деформации, в том числе и во времени, между собой.

Таким образом, для полноценной реализации вышесказанного по развитию механики полимеров, возможно формулирование трёх групп задач, которые необходимо исследовать:

Первая — проведение опытных изысканий над используемым в качестве связующих жёсткими полимерами с последующей аналитической обработкой результатов с целью выявления закономерностей деформаций. На данном этапе требуется получение полной системы уравнений, найти взаимосвязи с разделами механики: строительная механика, сопротивление материалов, теории упругости, пластичности и ползучести и т. д.

Вторая — исследование системы «армирующий элемент – связующий полимер» с точки зрения её совместной работы. Анализу подвергается полученная гетерогенная система с точки зрения определения её свойств как сплошной изотропной или анизотропной сред. Так же стоит задача прогнозирования будущих параметров армированных полимеров на основе изучения компонентов, их составляющих.

Третья — на основании комплекса изысканий по определению напряжённо-деформированного состояния армированных полимеров получение полной системы уравнений с последующем созданием теории прочности, максимально соответствующей наблюдаемым опытным данным. Цель: по данным простейших видов испытаний конструкций и их элементов иметь возможность прогнозирования условий разрушений таковых, находящихся в более сложном напряжённом состоянии.

Первая и вторая группы задач ориентированы, прежде всего, на специалистов–расчётчиков, а также людей, занимающихся конструкторской деятельностью. Третья группа задач интересна технологам, основной задачей которых является проведение научных изысканий по вопросам изготовления материалов, требуемые свойства которых определяются численным моделированием с целью максимального использования потенциала материала. Резюмируя вышесказанное, полноценные исследования перечисленных групп задач возможны

исключительно кооперацией групп учёных, в которые должны входить и теоретики, и экспериментаторы, на протяжении весьма длительного периода времени

В вопросах определения физико-механических свойств полимеров, в том числе армированных, были проведены весьма многочисленные научные изыскания; так гомогенным изотропным полимерам посвящены монографии Т. Алфрея [47], Л. Трелоара [48], А. Тобольского [46]. Ю. С. Лазуркин [41] уделял преимущественно своё внимание изучению не единичных свойств полимеров, а их совокупности.

Проведённый литературный обзор показал, что в вопросах научных изысканий, посвящённых жёстким сетчатым полимерам, имеется весьма скудное количество работ. Ещё меньше существует работ, посвящённых изысканиям армированных полимеров, а также вопросам исследования напряжённо-деформированного состояния в них при существенных колебаниях интенсивности напряжений и значительном градиенте температурного поля. Неудачей закончились и попытки найти исследования определения напряжённо-деформированного состояния полимерных систем, учитывающих реальные процессы, происходящие в них с течением времени (изменение температурного поля, различие релаксационных процессов и т. д.).

При этом основой теоретических изысканий найденных трудов явились линеаризованные физические соотношения, которые соответствуют реальным наблюдаемым процессам в полимерных материалах лишь отдалённо в некоторых частных случаях. Однако, расчётные модели могут максимально соответствовать реальным материалам и процессам только в случае использования нелинейных физических соотношений.

Феменологический подход, основанный на формальном обобщении линейных соотношений, позволил ряду авторов (Ю. Н. Работнов [49], А. А. Ильюшин с сотрудниками [50], А. К. Малмейстер с сотрудниками [51]) получить некоторые нелинейные соотношения. Более строго подхода в вопросах физической теории, в основе которой заложены изыскания молекулярной природы деформации полимеров придерживались А. Л. Рабинович [52, 53], А. А. Аскадский [39], Г. И. Гуревич [52, 54, 55, 56, 57]. Данный подход и используется в дальнейшем в диссертационной работе.

1.2 Вязкоупругость

Рассмотрим последовательно развитие вопросов вязкоупругости от «классических» моделей Максвелла и Кельвина, до современного нелинейного обобщённого уравнения Максвелла-Гуревича.

Для начала рассмотрим идеализированные случаи деформаций:

1. Упругая, в основе которой лежат «мгновенные» деформации, прямопропорциональные от интенсивности возникающего напряжения — описывается законом Гука.
2. Вязкая, скорость которой — описывается законом Ньютона

При этом в реальных твёрдых телах развитие деформаций не подчиняется идеализированным случаям и данные отклонения можно разделить на две группы:

1. Развитие деформаций происходит по отличному характеру от законов Гука и Ньютона — зависимость между деформациями и напряжениями описывается нелинейными выражениями.

2. Более сложные зависимости напряжений и деформации: при которой деформация может быть функцией не только от интенсивности напряжений в твёрдом теле, но и от скорости их изменения. При этом данная особенность характерна в системах, представляющих собой как жидкости, так и твёрдые тела. Подобные тела называются *вязкоупругими*.

В практике результаты опытных данных наиболее часто обрабатывают такие образом, чтобы получить выражения для интенсивности напряжения как функции деформации по времени ($\sigma/\varepsilon = f(t)$). При этом может быть полностью игнорирован вопрос определения их как функции интенсивности самих же напряжений или величины (скорости) деформаций — таким образом все исследования базируются лишь вопросами линейной вязкоупругости.

В своих исследованиях Максвелл предпочёл моделировать вязкоупругое тело пружиной, описывающей мгновенную упругую деформацию, и поршнем, описывающем вязкую среду или необратимые деформации течения, при этом их он соединял последовательно (рисунок 1.1, а). Кельвин так же использовал в своих изысканиях модели при помощи пружины и поршня, по использовал их параллельное соединение; в дальнейшем такую модель развивал Фойгт.

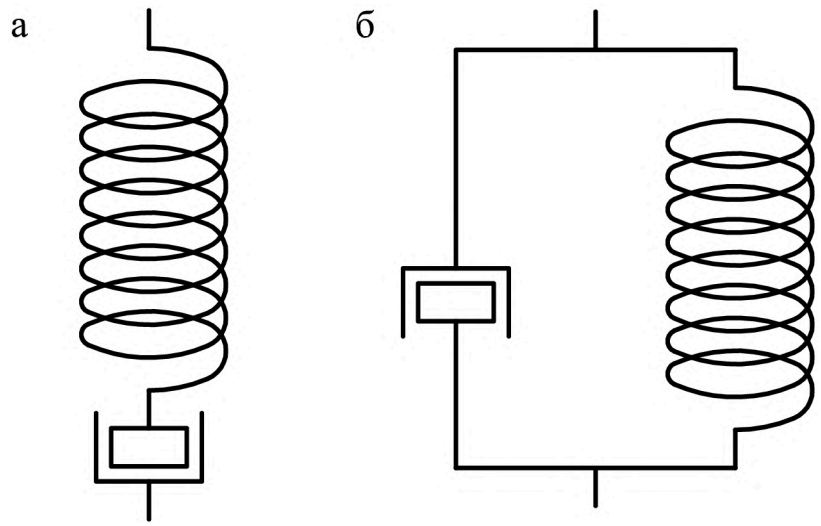


Рисунок 1.1 — Модели вязкоупругости Максвелла (а) и Кельвина (б)

На основе модели Максвелла скорость изменения напряжений может быть описана как функция от времени следующим выражением: для деформации сдвига

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{с}}}{\mathrm{d}t} = G\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{с}}}{\tau}; \tag{1.1}$$

для деформации растяжения

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} = E\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{н}}}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_{\text{н}}}{\tau}, \tag{1.2}$$

где $\sigma_с$ и $\sigma_н$ — напряжение сдвига и нормальное напряжение; t — время деформации; γ и $\varepsilon_н$ — относительная деформация сдвига и растяжения; G — модуль сдвига; E — модуль упругости; τ — время, необходимое для того, чтобы напряжение в теле уменьшилось в e раз.

В случае, если имеет место случай с неизменной по времени деформацией ($\varepsilon = \text{const}; d\varepsilon/dt = 0$), выражения (1.1) и (1.2) для описания процессов в вязкоупругом теле будут записываться

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_с}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_с}{\tau}; \qquad \frac{\mathrm{d}\sigma_н}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma_н}{\tau}. \tag{1.3}$$

В общем виде выражения (1.3) записываются

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sigma} = -\frac{\mathrm{d}t}{\tau}. \tag{1.4}$$

Интегрирование выражения (1.4) даёт

$$\ln\frac{\sigma}{\sigma_0} = -\frac{t}{\tau}$$

или

$$\sigma = \sigma_0 e^{-t/\tau}, \tag{1.5}$$

где σ_0 — начальное напряжение при $t = 0$, определяющее неравновесное состояние тела; σ — напряжение через некоторый промежуток времени t.

Анализ выражения (1.5) показывает, что с течением времени должно произойти снижение интенсивности напряжений в теле, т. е. $\sigma < \sigma_0$. При этом, если рассматривать крайность, когда время стремится к бесконечности $t \to \infty$ теоретическая интенсивность напряжений будет неограниченно стремиться к нулю. В случае исследования некоторого промежуточного отрезка времени, как следует из выражения (1.5), можно определить период времени, за который напряжения теряют свою интенсивность. Так, если интенсивность напряжений падают в e раз $\sigma = \sigma_0/e$, и этот период занимает некоторый период времени t, то

$$\tau = t. \tag{1.6}$$

Таким образом, смысл переменной τ в выражении (1.2) заключается в том, что она показывает, за какой период времени интенсивность напряжений изменяется в e раз, что и показывает выражение (1.6), и называется *временем релаксации полимера*.

При анализе постоянной во времени интенсивности напряжений ($\sigma = \text{const}$; $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}t = 0$) выражения (1.1) и (1.2) записываются

$$G\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_с}{\tau} = 0; \qquad E\frac{\mathrm{d}\varepsilon_н}{\mathrm{d}t} - \frac{\sigma_н}{\tau} = 0.$$

Отсюда

$$\sigma_{\text{с}} = G\tau\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}; \tag{1.7}$$

$$\sigma_{\text{н}} = E\tau\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{\text{н}}}{\mathrm{d}t}. \tag{1.8}$$

Сравнение уравнений (1.7) и (1.8) с законом Ньютона

$$\sigma_{\text{с}} = \eta_{\text{сд}}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}$$

видно, что произведение величин $G\tau$ и $E\tau$ равно коэффициенту вязкости:

$$\eta_{\text{р}} = E\tau; \tag{1.9}$$

$$\eta_{\text{сд}} = G\tau. \tag{1.10}$$

где $\eta_{\text{р}}$ и $\eta_{\text{сд}}$ — коэффициенты вязкости при деформации растяжения и сдвига.

Следствием анализа выражений (1.9) и (1.10) является вывод, что коэффициенты вязкости деформации растяжения (сжатия) и сдвига не совпадают и имеют различную величину. При этом их разница будет максимальной в случае, если объектом изысканий является абсолютно упругое тело ($\nu = 0.5$). В этом случае из выражения связи модулей Юнга первого и второго рода

$$G = \frac{E}{2\,(1+\nu)}$$

получаем, что $E = 3G$ и, следовательно, $\eta_{\text{р}} = 3\eta_{\text{сд}}$, т. е. для абсолютно твёрдого тела коэффициент вязкости, полученный при проведении экспериментальных исследований на растяжение, должен быть в три раза больше коэффициента вязкости, измеренного при сдвиге.

Отличие модели Кельвина от Максвелла заключается в том, что согласно схеме соединения упругого и вязкого элементов, общее напряжение будет делиться между ними. В этом случае общее напряжение σ будет определяться суммой напряжения в упругом компоненте $\sigma_{\text{упр}}$ с напряжениями в вязком $\sigma_{\text{вязк}}$:

$$\sigma = E\varepsilon + \eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}, \tag{1.11}$$

где ε — относительная деформация; $\dfrac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t}$ — скорость изменения относительной деформации.

Получившееся неоднородное дифференциальное уравнение (1.11) может быть решено путём следующих поочерёдных операций:

1. Поиск общего решения аналогичного однородного уравнения

$$\eta\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t} + E\varepsilon = 0,$$

которое равно

$$\varepsilon = Ce^{-(E/\eta)t},$$

где C — постоянная интегрирования, равная $-\sigma/E$.

2. Поиск частного решения неоднородного уравнения. В данном случае

$$\varepsilon_{\text{част}} = \frac{\sigma}{E}.$$

Общее решение равно их сумме:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + Ce^{-(E/\eta)t}.$$

Следовательно

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}\left(1 - e^{-t/\tau}\right). \tag{1.12}$$

Анализ выражения (1.12) показывает, что в случае исследования процессов на достаточно продолжительных интервалах времени или, по-другому, стремящихся к бесконечности, величина относительной деформации ε будет асимптотически приближаться к некоторой конечной величине, равной отношению напряжения к модулю упругости σ/E. В случае исследования некоторого конечного интервала времени наблюдаемая деформация будет представлять лишь некоторую долю от общей деформации, поэтому можно сказать, что имеет место запаздывание во времени развития деформации. Таким образом, параметр времени $\tau_з = \eta/E$ принято также называть временем запаздывания.

В многочисленных литературных источникам рассматриваются отличные от рассмотренных модели ползучести, в основе которых по прежнему заложена дифференциация деформаций на две составляющие: упругую и пластическую, т. е.

$$\varepsilon = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}.$$

В общем случае деформация ползучести представляется функциональной зависимостью от множества переменных (факторов)

$$\varepsilon_{cr} = f_1(\sigma) f_2(t) f_3(T).$$

Наиболее известными и часто используемыми в мире являются следующие функциональные зависимости напряжений $f_1(\sigma)$:

$f_1(\sigma) = B\sigma^n$ — закон Нортона,
$f_1(\sigma) = C\,\mathrm{sh}(\alpha\sigma)$ — закон Прандтля,
$f_1(\sigma) = De^{\beta\sigma}$ — закон Дорна,
$f_1(\sigma) = A\left[\mathrm{sh}(\gamma\sigma)\right]^n$ — закон Гарофало,
$f_1(\sigma) = B(\sigma - \delta)^n$ — закон трения,

где все параметры, за исключением σ, определяются для каждых отдельных материалов на основе опытных данных в виде констант.

Наиболее общим из приведённых зависимостей является соотношение Гарофало, частным случаем которого являются законы Нортона, Прандтля и Дорна. При этом в его основе лежит нелинейная зависимости между скоростью деформаций ползучести и напряжениями. Степенной закон Нортона также получен из физических соображений и широко распространён в практике.

Функциональные зависимости времени $f_2(t)$ обычно используются в следующие виде:

$$
\begin{aligned}
&f_2(t) = t && \text{— для второй стадии ползучести,}\\
&f_2(t) = Bt^m && \text{— закон Бейли,}\\
&f_2(t) = \left(1 + bt^{1/3}\right) e^{kt} && \text{— закон Андраде,}\\
&f_2(t) = \textstyle\sum_i a_i t^{m_i} && \text{— закон Греэхема и Уоллеса.}
\end{aligned}
$$

Функциональная зависимость от температуры $f_3(T)$ в подавляющем большинстве случаев принимают в виде основанного на законе Аррениуса выражения

$$f_3(T) = Ae^{-\Delta H/kT}.$$

Здесь ΔH — энергия активации; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура.

В практических расчётах, которые как правило наполнены всевозможными коэффициентами запаса, не требуется получить результаты, максимально приближенные к реальной работе материала. В связи с этим обычно применяют зависимости вида $\varepsilon_{cr}(\sigma, t, T)$, включающего наиболее простые выражения из приведённых выше функциональных зависимостей:

$$\varepsilon_{cr} = Ce^{-\Delta H/kT} t^m \sigma^n,$$

откуда для неизменного во времени температурного поля можно получить выражение

$$\varepsilon_{cr} = Bt^m \sigma^n. \tag{1.13}$$

При этом функциональные зависимости обладают существенным недостатком — основаны на неизменности интенсивности напряжений в теле. Таким образом они формально из себя представляют лишь подобие математической модели для описания ползучести материала двух стадий. В реальном теле интенсивность напряжения всегда переменная. Даже сам процесс приложения нагрузки происходит на протяжении какого-то ограниченного периода времени, даже весьма малого. Таким образом, для моделирования напряжённо-деформированного состояния, близкого к тому, которое наблюдается в реальных телах, возникает необходимость для получения и использования функциональных зависимостей скоростного типа. Для этого рассмотрим скорость изменения деформаций при постоянстве напряжения ($\sigma = \text{const}$) путём

дифференцирования по времени выражения (1.13):

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = mBt^{m-1}\sigma^{n}, \tag{1.14}$$

которое при учёте выражений (1.13) и (1.14) путём математических преобразований можно свести к записи, лишённой составляющей времени t:

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon_{cr}}{\mathrm{d}t} = \frac{mB^{1/m}\sigma^{n/m}}{\varepsilon_{cr}^{(1-m)/m}}.$$

Определение конкретного вида выражений, описывающих выражения скоростного типа, представляют собой математическую модель, описывающую приближённо первую стадию ползучести, при которой её скорость убывает.

Современные расчётные комплексы (ANSYS [58, 59], Solid Works [60, 61] и др.) используют выражения для описания ползучести как функциональную зависимость от напряжений, относительной деформации, времени и температуры

$$\varepsilon_{creep} = f_1(\sigma)f_2(\varepsilon)f_3(t)f_4(T).$$

Качественно и количественно данная функциональная зависимость весьма удовлетворительно описывает процессы только в случае, если речь идёт о необратимых деформациях; отсутствие возможности определения обратимых деформаций является её слабым звеном и, соответственно, расчётных комплексов. Решением проблемы, с одной стороны, является использование законов связи напряжений и деформаций, к примеру нелинейное обобщённое уравнение Максвелла-Гуревича, учитывающее возможность развития обратимых деформаций, с другой, использование стандартных программных комплексов часто становится невозможным, и возникает необходимость в ручном программировании.

1.3 Основные уравнения в тензорной форме. Уравнение Максвелла-Гуревича

Основные опытные испытания, проводимые с целью установления физико-механических параметров полимеров проводятся со стандартными образцами, имеющими, как правило, прямоугольное поперечное сечение. В связи с этим часть выкладок будет происходить в декартовой системе координат x, y, z (рисунок 1.2); основные задачи диссертационной работы рассматриваются в осесимметричной постановке.

Представить дальнейшие выкладки можно в более компактном виде при помощи обозначения осей цифровыми обозначениями 1, 2, 3

$$x = x_1; \quad y = x_2; \quad z = x_3; \quad u = u_1; \quad v = u_2; \quad w = u_3,$$

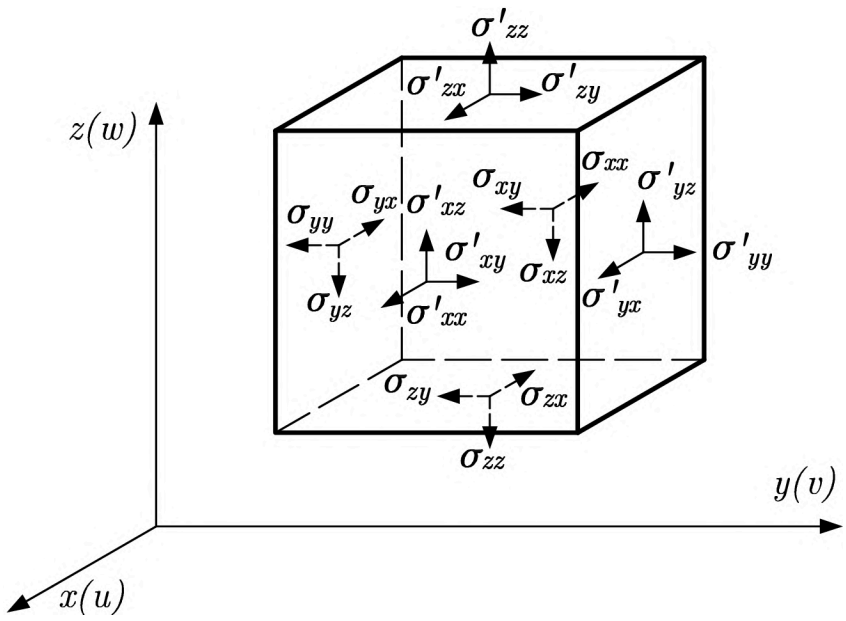


Рисунок 1.2 — Элемент сплошной среды в декартовых координатах

а также для компонентов напряжений

$$\sigma_{xx} = \sigma_{11}, \ldots, \quad \tau_{yz} = \sigma_{yz} = \sigma_{23}, \ldots, \quad (1,2,3), \quad (\sigma_{ik} = \sigma_{ki}).$$

При этом в случае обозначения сдвиговых деформаций необходимо отметить различие, встречающееся в многочисленных трудах:

$$\gamma_{yz} = \varepsilon_{yz} = 2\varepsilon_{23}. \tag{1.15}$$

Здесь в выражении (1.15) вводится коэффициент «2» с целью получения более компактной формы записи выражений, в том числе и в матричном виде.

Следовательно, составляющие общей деформации (упругие и высокоэластические) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{11}, \ldots, & \varepsilon_{yz} &= 2\varepsilon_{23}, \ldots, \\ \varepsilon_{el,xx} &= \varepsilon_{el,11}, \ldots, & \varepsilon_{el,yz} &= 2\varepsilon_{el,23}, \ldots, \\ \varepsilon_{cr,xx} &= \varepsilon_{cr,11}, \ldots, & \varepsilon_{cr,yz} &= 2\varepsilon_{cr,23}, \ldots, \quad (1,2,3). \end{aligned}$$

Компоненты тензора малой суммарной деформации через смещения записываются как:

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{1.16}$$

Суммарная деформация имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{el,ik} + \varepsilon_{cr,ik} + \alpha(T - T_0)\,\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{1.17}$$

где коэффициент δ_{ik} принимает значения

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Скорость деформаций получают дифференцированием выражения (1.17)

$$v_{s,ik} = \frac{\partial \varepsilon_{el,ik}}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{1.18}$$

На основании закона Гука в обратной форме (см. параграф 1.5, с.22) для упругих составляющих деформаций справедлива запись

$$\varepsilon_{el,ik} = \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu} p \delta_{ik} \right) \frac{1}{2G} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{1.19}$$

где ν — коэффициент Пуассона; $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига; p — среднее давление.

Согласно источнику [53], скорость высокоэластических деформаций полимера может выть записана при помощи следующего выражения:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left[\frac{3}{2} \left(\sigma_{ik} - p \delta_{ik} \right) - E_\infty \varepsilon_{cr,ik} \right] \frac{1}{\eta^*} \qquad (i,k = 1,2,3), \tag{1.20}$$

или с учётом закона Гука и последующих преобразований:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr,ik}}{\partial t} = \left(\varepsilon_{el,ik} - \frac{\theta_{el} \delta_{ik}}{3} - \frac{G_\infty}{G} \varepsilon_{cr,ik} \right) \frac{1}{\left(1 + \dfrac{G_\infty}{G} \right) T^*} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{1.21}$$

В основе предложенных выводов лежит теория о несжимаемости высокоэластической деформации, то есть о равенстве нулю её объёмной высокоэластической деформации ($\theta_{cr} = 0$). Согласно данной теории следует, что коэффициент Пуассона для высокоэластической деформации составляет $\nu_{cr} = 0.5$ и тогда

$$G_\infty = \frac{E_\infty}{2(1+\nu_{cr})} = \frac{E_\infty}{3}, \quad \text{отсюда} \quad E_\infty = 3G_\infty,$$

где T^* — соответствующее время релаксации.

Релаксационная вязкость может быть записана при помощи выражения:

$$\eta^* = \eta_0^* \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} \left[\gamma^* p + \left| \frac{3}{2} \left(\sigma_{rr} - p \right) - E_\infty \varepsilon_{cr,rr} \right|_{\max} \right] \right\}, \tag{1.22}$$

где индексом r обозначены главные направления для напряжений; γ^* — объёмный коэффициент, зависящий от структуры полимера и температуры.

Зависимость между временем релаксации T^* и коэффициентом релаксационной вязкости η^* описывается формулой

$$\eta^* = 3G\left(1 + G_\infty/G\right)T^*. \tag{1.23}$$

Здесь, как и ранее, использованы соотношения

$$p = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\delta_{ik} = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}\sigma_{ii}; \tag{1.24}$$

$$\theta_{el} = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{el,ii}; \qquad p = K\theta_{el}; \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}. \tag{1.25}$$

Относительное изменение объёма записывается с учётом используемых гипотез

$$\theta = \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \qquad \sum_{i=1}^{3}\varepsilon_{cr,ii} = 0.$$

$$\theta = \theta_{el} + 3\alpha(T - T_0).$$

Представленное выражение для определения коэффициента релаксационной вязкости (1.22) удобно использовать в случае изотермических процессов. В этом случае все составляющие η_0^*, γ^* и m^*, являющиеся функцией температуры, становятся константами. При этом газовая постоянная при слагаемом $p = \theta_{el}K$ в выражении (1.22) на столько мала, что в исследованиях ей можно пренебречь.

Комбинирование выражений (1.17)—(1.19) позволяет в результате алгебраических операций получить систему уравнений относительно компонентов трёх величин: напряжений — σ_{ik}, смещений — u_i и суммарной деформации — ε_{ik}.

Явное выражение ползучести $\varepsilon_{cr,ik}$ с учётом остаточной деформации может быть получено путём подстановки (1.19) в (1.17)

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \varepsilon_{el,ik} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik}$$

или

$$\varepsilon_{cr,ik} = \varepsilon_{ik} - \left(\sigma_{ik} - \frac{3\nu}{1+\nu}p\delta_{ik}\right)\frac{1}{2G} - \alpha(T - T_0)\delta_{ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{1.26}$$

Для удобства дальнейшей работы удобно ввести обозначения

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ik} - p\delta_{ik}) - E_\infty\varepsilon_{cr,ik} \qquad (i,k = 1,2,3). \tag{1.27}$$

Необходимо отметить, что $f_{ik}^* = f_{ki}^*$.

Подставляя в последнее уравнение выражение (1.26), определяют f_{ik}^* через σ_{ik} и ε_{ik}, справедливое при отсутствии остаточной деформации:

$$f_{ik}^* = \frac{3}{2}\left[\left(1+\frac{G_\infty}{G}\right)\sigma_{ik} - \left(1+2\nu\frac{E_\infty}{E}\right)p\delta_{ik}\right] + \alpha E_\infty(T-T_0)\delta_{ik} - E_\infty\varepsilon_{ik} \qquad (i,k=1,2,3). \quad (1.28)$$

Дальнейшая подстановка выражений (1.26) и (1.28) в (1.20) приводит к получению выражения для связи напряжений и деформаций — обобщённого уравнение Максвелла, включающего в себя лишь компоненты напряжений и суммарной деформации.

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i,k=1,2,3);$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2G}\left(\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t} - \frac{3}{1+\nu}\frac{\partial p}{\partial t}\delta_{ik}\right) + \alpha\delta_{ik}\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{f_{ik}^*}{\eta^*} \quad (i,k=1,2,3). \qquad (1.29)$$

При этом в выражении (1.29) коэффициент релаксационной вязкости η^* определяется

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*}\exp\left\{\frac{1}{m^*}\left[\gamma^* p + |f_{rr}^*|_{\max}\right]\right\}.$$

Таким образом, экспоненциальная зависимость коэффициента релаксационной вязкости η^* приводит к тому, что система (1.29) — нелинейная, что практически исключает возможность её прямого непосредственного решения за исключением некоторых частных случаев, не рассматриваемых в настоящей работе.

1.4 О константах уравнения связи и понятие линеаризации уравнений связи

Для решения задач механики полимеров, в отличие от «классической» теории упругости, помимо двух физико-механических параметров, соответствующих упругой работе материала (E — модуль упругости в случае растяжения–сжатия или G — модуль сдвига в случае сдвиговых деформаций и ν — коэффициент Пуассона), используются ещё четыре, связанные с высокоэластической работой полимеров (η_0^* — коэффициент начальной релаксационной вязкости, m^* — модуль скорости, E_∞ — модуль высокоэластичности и γ^* — газовая постоянная). Необходимо отметить, что все шесть перечисленных параметров являются выраженной функцией температуры. Однако, в настоящем параграфе рассматривается случай неизменной температуры ни во времени, ни в массиве тела, соответственно все физико-механические параметры в данном случае являются независимыми константами. Согласно исследованиям А. Л. Рабиновича [53] данные параметры не представляется возможным определить путём теоретических изысканий; таковое возможно провести лишь путём непосредственного макроскопического анализа.

Первые два параметра, связанные с упругой работой материала (модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν) связаны с атомным строением вещества, мало зависят от надмолекулярной структуры полимера и определяются, в основном, его химической структурой.

Из высокоэластических параметров, например, модуль высокоэластичности E_∞, напрямую связан с взаимодействием отдельных элементов длинноцепочечных молекулярных комплексов, а также их тепловым движением. Таким образом, он определяется структурными характеристиками материала тела и, соответственно, в значительное мере зависит от температуры полимера.

Столь высокую зависимость как от температуры полимера, так и его структурного состояния, показывает коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*. Связано это с тем, что сам коэффициент выражается через временной релаксационный параметр t_0^* и энергию активации.

Произвести количественную оценку объёмного коэффициента γ^*, также позволяют исследования А. Л. Рабиновича [53], в котором приводится выражение

$$\gamma^* = \frac{9}{2}\left(\frac{\alpha^*}{\beta^*}\right)\frac{1-2\nu}{1+\nu}\left[1+\frac{2}{3}\frac{E_\infty}{E}(1+\nu)\right],$$

где α^* и β^* — структурные постоянные. Следовательно, объёмный коэффициент γ^* является функциональной зависимостью от нескольких параметров: структуры полимера и его температуры. Однако, эти зависимости проявляются не в столь значительной степени, как в случае модуля высокоэластичности E_∞.

Ряд «классических» работ [62, 63] также подтверждают приведённые выводы по физико-механическим параметрам полимера. Кроме того, приведённых в них экспериментальные исследования и их результаты до сих пор весьма актуальны, особенно в вопросах определения упругой и высокоэластической деформаций (за исключением γ^*). Однако, не смотря на многочисленные исследования в этой области, вызывает большое затруднение нахождение литературных источников по исследованию физико-механических параметров, как зависящих от их химического состава для возможности использования их в обобщённом уравнении Максвелла.

Нелинейность всех вышеприведённых уравнений связи накладывает значительные ограничения на возможности определения напряжённо-деформированного состояния путём использования аналитических методов решения. Получение решения может быть достигнуто лишь при помощи использования численных и численно-аналитических методов. Таким образом для частичного облегчения процедуры решения или нахождения некоторых частных решений, прибегают к методам приближённых вычислений, а также методам линеаризации уравнений связи.

Использование линеаризованных уравнений позволяет получить оценку напряжённо-деформированного состояния, по крайней мере качественно, что довольно часто оказывается достаточным на первом этапе. Однако, в угоду облегчения получения решения, сильно страдают количественные результаты, особенно это касается сравнения теоретических изыскания с соответствующими экспериментальными результатами. Как указано в работе А. Л. Рабиновича [64] количественное и качественное совпадение линеаризованных решений

возможно только в случае малых напряжений. Тем не менее, применение линеаризованных решений может принести и пользу, так в случае численного интегрирования можно произвести более точную оценку подбираемых параметров, влияющих на результаты решений. Данный подход весьма положительно сказывается на оптимизации объёма вычислений и существенным сокращением затрат времени.

Вопросы линейной теории высокоэластичности поднимались в изысканиях многочисленных авторов [46, 47, 65, 66, 67], в том числе для многочисленных одноосных задач. В этом случае линейная теория является лишь частным случаем нелинейной, имеющей место при выполнении следующих условий:

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^*(T)\,.$$

В случае определения функциональной зависимости температуры от координаты и времени $T = T(x_i, t)$, появляется возможность и для определения функциональной зависимости коэффициента начальной релаксационной вязкости $\eta_0^* = \eta_0^*(x_i, t)$. В этом случае скорость высокоэластических деформаций (1.20) принимает форму линейной зависимости между напряжениями и деформациями; при этом в случае определения её как функции от координаты и времени, она, зависимость, может сохранять свою нелинейность.

В случае максимального упрощения уравнения связи путём его линеаризации, возможно получение выражения вида

$$m^* \longrightarrow \infty, \qquad \eta^* \longrightarrow \eta_0^* \equiv \text{const}.$$

Необходимо сделать замечание, что на возможность применения вышеуказанного выражения накладывается ограничение на условия, в которых рассматривается работа тела: должно быть постоянное температурное поле при изотермических процессах. Тогда коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^* принимает постоянную величину, зависящую исключительно от температуры материала. Анализ выражения (1.22) показывает, что даже в этом случае не всегда имеется возможность проведения линеаризации, поскольку релаксационная вязкость зависит как от температуры (через коэффициент начальной релаксационной вязкости), так и от уровня напряжений и модуля скорости m^*, которые также имеют сильную функциональную зависимость от температуры. Таким образом, использование линеаризованных уравнений, по сравнению с нелинеаризованными, может приводить к весьма существенным отличиям в результатах.

1.5 Основные уравнения механики деформируемого твёрдого тела, теории упругости, пластичности и ползучести

Дифференциальные уравнения равновесия *(уравнения Навье)* в цилиндрической системе координат записываются так:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{\theta r}}{r} + \Theta = 0; \\ \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \dfrac{\tau_{zr}}{r} + Z = 0, \end{cases}$$

где R, Θ, Z — объёмные силы.

Формулы Коши в цилиндрической системе координат имеют вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{\partial u}{\partial r}; & \gamma_{r\theta} = r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{v}{r}\right) + \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial \theta}; \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial \theta} + \dfrac{u}{r}; & \gamma_{\theta z} = \dfrac{1}{r} \cdot \dfrac{\partial w}{\partial \theta} + \dfrac{\partial v}{\partial z}; \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}; & \gamma_{rz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial r}. \end{cases} \tag{1.30}$$

Уравнения совместности деформаций Сен-Венана в цилиндрической системе координат имеют вид [68]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \dfrac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial^2 (r\gamma_{r_\theta})}{\partial r \partial \theta} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2} + \dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2} - 2\dfrac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r \partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2 \varepsilon_\theta}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial \gamma_{\theta z}}{\partial \theta} + \gamma_{rz}\right) = 0; \\ -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \theta \partial z} + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\gamma_{\theta z}}{\partial r}\right) - \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 (r^2 \gamma_{r\theta})}{\partial r \partial z} - \dfrac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left(\dfrac{\gamma_{rz}}{r}\right) = 0; \\ r\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_r - \dfrac{\partial (r\varepsilon_\theta)}{\partial r}\right) - \dfrac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta^2} + \dfrac{\partial^2 (r\gamma_{\theta z})}{\partial r \partial \theta} + \dfrac{\partial^2 (r\gamma_{r\theta})}{\partial \theta \partial z} = 0; \\ \dfrac{\partial^2}{\partial r \partial \theta}\left(\dfrac{\varepsilon_z}{r}\right) + \dfrac{\partial^2 \gamma_{r\theta}}{\partial z^2} - r\dfrac{\partial^2}{\partial r \partial z}\left(\dfrac{\gamma_{\theta z}}{r}\right) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial \theta \partial z} = 0. \end{cases} \tag{1.31}$$

В работе [69] отмечается, что в случае плоских осесимметричных задач в цилиндрических координатах удобнее пользоваться выражением, нежели системой уравнений (1.31). Продифференцируем ε_θ, входящее в уравнение Коши (1.30), по радиусу r:

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\left(r \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - u\right) = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \cdot \frac{u}{r} = \frac{\varepsilon_r}{r} - \frac{\varepsilon_\theta}{r}.$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0, \tag{1.32}$$

которое имеет более низкий порядок, чем уравнение, получающееся напрямую из системы (1.31).

Закон Гука в цилиндрических координатах записывается так:

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \varepsilon_{el,r} + \varepsilon_{pl,r} + \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{r\theta} = \gamma_{el,r\theta} + \gamma_{pl,r\theta} + \gamma_{cr,r\theta}; \\ \varepsilon_\theta = \varepsilon_{el,\theta} + \varepsilon_{pl,\theta} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{\theta z} = \gamma_{el,\theta z} + \gamma_{pl,\theta z} + \gamma_{cr,\theta z}; \\ \varepsilon_z = \varepsilon_{el,z} + \varepsilon_{pl,z} + \varepsilon_{cr,z} + \varepsilon_{\text{вын}}; & \gamma_{rz} = \gamma_{el,rz} + \gamma_{pl,rz} + \gamma_{cr,rz}, \end{cases} \tag{1.33}$$

где ε_r, ε_θ, ε_z — полная относительная деформация; $\gamma_{r\theta}$, $\gamma_{\theta z}$, γ_{rz} — полная угловая деформация; $\varepsilon_{el,\xi}$, $\gamma_{el,\zeta\xi}$ $(\zeta, \xi = r, \theta, z)$ — от англ. *elastic* — упругая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{pl,\xi}$, $\gamma_{pl,\zeta\xi}$ $(\xi = r, \theta, z)$ — от англ. *plastic* — пластическая линейная и угловая деформации; $\varepsilon_{cr,\xi}$, $\gamma_{el,\zeta\xi}$ $(\xi = r, \theta, z)$ — от англ. *creep* — деформации ползучести материала, линейная и угловая, представляющие собой, соответственно, высокоэластическую деформацию полимеров; $\varepsilon_{\text{вын}}$ — вынужденные деформации (температурное расширение, радиация, влагоупругость и т. д.);

$$\begin{cases} \varepsilon_{el,r} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,r\theta} = \dfrac{\tau_{r\theta}}{G}; \\ \varepsilon_{el,\theta} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right]; & \gamma_{el,\theta z} = \dfrac{\tau_{\theta z}}{G}; \\ \varepsilon_{el,z} = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right]; & \gamma_{el,rz} = \dfrac{\tau_{rz}}{G}. \end{cases}$$

При использовании численных методов часто удобно использовать *закон Гука в обратной форме*:

$$\begin{cases} \sigma_r = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_r - \varepsilon_{pl,r} - \varepsilon_{cr,r}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_\theta = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_\theta - \varepsilon_{pl,\theta} - \varepsilon_{cr,\theta}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \sigma_z = \lambda\left(\theta - \theta_{pl} - \theta_{cr}\right) + 2\mu\left(\varepsilon_z - \varepsilon_{pl,z} - \varepsilon_{cr,z}\right) - 3K\varepsilon_{\text{вын}}; \\ \tau_{r\theta} = \left(\gamma_{r\theta} - \gamma_{pl,r\theta} - \gamma_{cr,r\theta}\right) G; \\ \tau_{\theta z} = \left(\gamma_{\theta z} - \gamma_{pl,\theta z} - \gamma_{cr,\theta z}\right) G; \\ \tau_{zr} = \left(\gamma_{zr} - \gamma_{pl,zr} - \gamma_{cr,zr}\right) G, \end{cases} \tag{1.34}$$

где

$$\theta_{pl} = \varepsilon_{pl,r} + \varepsilon_{pl,\theta} + \varepsilon_{pl,z}$$

— объёмная пластическая деформация;

$$\theta_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}$$

— объёмная деформация ползучести;

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \qquad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

— параметры Ламе.

Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела П и работой внешних сил A:

$$Э = П - A. \tag{1.35}$$

Потенциальная энергия упругой деформации тела описывается выражением:

$$П = \frac{1}{2}\int\limits_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} + \sigma_z \varepsilon_{el,z} + \tau_{r\theta}\gamma_{el,r\theta} + \tau_{\theta z}\gamma_{el,\theta z} + \tau_{zr}\gamma_{el,zr}\right) dV, \tag{1.36}$$

или в матричной форме:

$$П = \frac{1}{2}\int\limits_V \left\{\sigma\right\}^T \cdot \left\{\varepsilon_{el}\right\} dV, \tag{1.37}$$

где $\left\{\sigma\right\}^T = \left\{\sigma_r \quad \sigma_\theta \quad \sigma_z \quad \tau_{r\theta} \quad \tau_{\theta z} \quad \tau_{zr}\right\}$;
$\left\{\varepsilon_{el}\right\} = \left\{\varepsilon_{el,r} \quad \varepsilon_{el,\theta} \quad \varepsilon_{el,z} \quad \gamma_{el,r\theta} \quad \gamma_{el,\theta z} \quad \gamma_{el,zr}\right\}^T$.

Работа внешних сил описывается выражением:

$$A = \int\limits_V (Ru + \Theta v + Zw)\, dV + \int\limits_\Omega \left(\bar{R}u + \bar{\Theta}v + \bar{Z}w\right) d\Omega, \tag{1.38}$$

где R, Θ, Z и $\bar{R}, \bar{\Theta}, \bar{Z}$ — представляют собой проекции на оси координат, соответственно, объёмных (массовых) сил и поверхностных нагрузок.

В общем виде уравнение теплопроводности записывается:

$$-\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) = q_T - \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1.39}$$

при граничных условиях

$$T = T_\Gamma \quad \text{на} \quad \Gamma_1;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + Q = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_2;$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T - T_0) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_3,$$

и начальном условии: $T = T_*$ при $t = t_0$.

Выражение (1.39) для практических расчётов часто записывают в виде:

$$-\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) + \beta T = f(r, \theta, z, t), \tag{1.40}$$

Здесь в выражениях (1.39) и (1.40): T — температура; $\varkappa = \dfrac{\lambda_T}{c_p \rho}$ — коэффициент температуропроводности материала; λ_T — коэффициент теплопроводности; c_p — изобарная теплоёмкость; ρ — плотность материала; q_T — удельная мощность источников теплоты,

которая считается положительной, если теплота подводится к структуре; Q — поток теплоты на части границы Γ, который считается положительным, если теплота теряется структурой; α — коэффициент теплообмена с окружающей средой температурой T_0; T_Γ — температура на части границы Γ; T_* — начальное распределение температуры; $\Gamma = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2 \bigcup \Gamma_3$ — полная граница многослойной области V; n — внешняя нормаль к границе Γ.

1.6 Переход от эллиптических уравнений к вариационной постановке

Наиболее часто при расчёте физических полей приходится иметь дело с эллиптическими краевыми задачами следующего вида: необходимо определить функцию $u(\bar{x}) : \Omega \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую уравнению

$$-\operatorname{div}(\alpha \operatorname{grad} u) + \beta u = f \tag{1.41}$$

с краевыми условиями

$$u(\bar{x})|_{\Gamma 1} = g(\bar{x}); \tag{1.42}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 2} - \Theta = 0; \tag{1.43}$$

$$\alpha \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{\Gamma 3} + \gamma\left(u|_{\Gamma 3} - p\right) = 0, \tag{1.44}$$

где $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \Gamma$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

В трудах [70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77] приводится теорема, согласно которой решение задач (1.41)—(1.44) эквивалентно задаче минимизации выпуклого функционала: $u = \arg\min_v \operatorname{Im} v$, где

$$\operatorname{Im}(v) = \int\limits_{\Omega} \left[\alpha (\operatorname{grad} v)^2 + \beta v^2\right] d\Omega + \int\limits_{\Gamma 3} \gamma v^2 \, d\Gamma - 2\int\limits_{\Gamma 3} \gamma p v \, d\Gamma - 2\int\limits_{\Gamma 2} \Theta v \, d\Gamma - 2\int\limits_{\Omega} f v \, d\Omega. \tag{1.45}$$

Глава 2. Методика определения реологических параметров на основе обработки опытных результатов

В. Ф. Бабич [62], А. Л. Рабинович [53, 64, 78] в своих исследованиях 50–60-х годов прошлого века показали, что остаточные деформации полимера значительно меньше общей суммарной деформации, которая сама по себе гораздо меньше единица ($\varepsilon \ll 1$). Связан данный факт был с сетчатой структурой полимера.

Таким образом в последующих выкладках вполне правомерно полностью исключить развитие пластических деформаций, оставив для изучения только две составляющие: малую упругую и высокоэластическую

С другой стороны, необходимо знать историю работы конструкции, так развитая ранее деформация материала может приводить к пагубным последствиям, заключающимся в разрушении тела. Соответственно, на основе максимального учёта всех деформаций, как развивающихся в настоящий момент, так и ранее, позволяют произвести примерную оценку прочности конструкции и момента времени, когда возможно разрушение конструкции, а также экстраполировать полученные данные на весь период исследования.

В механике деформируемого твёрдого тела в качестве критериев разрушения тела может приниматься достаточно большое количество различных факторов: превышение интенсивности предельных напряжений, превышение допускаемого уровня полных деформаций и т. д. В. Ф. Бабич [62], А. Л. Рабинович [53, 64, 78] в своих экспериментальных исследованиях установили, что в качестве такого критерия может являться некоторое значение предельной деформации. Данные деформации основаны на испытаниях при одноосном растяжении и сжатии, а также на сдвиге. Согласно выводам исследователей была сформулирована приближённая теория прочности, выходящая за рамки настоящей диссертационной работы.

Поскольку малы не только отдельные составляющие компоненты деформаций (упругие и высокоэластические), но и мала сама суммарная деформация, как говорится в работе А. Л. Рабиновича [53], остаётся правомочной исключительно общая кинематическая теория, при которой справедлива физическая нелинейность, описываемая соответствующими уравнениями связи. На основании вышесказанного все выкладки настоящей диссертационной работы будут включать только малые компоненты деформаций (упругие и высокоэластические).

Итоговая система разрешающих уравнений может быть сведена к трём вариантам: векторному (см. параграф 1.5 на с. 22), тензорному и координатному. При этом наиболее удобному варианту соответствует именно тензорный вариант формы записи.

2.1 Методика определения физико-механических параметров по кривым ползучести полимера

Для получения физико-механических параметров, необходимо провести ряд опытных данных по получению кривых связи напряжения-деформации с их последующей аппроксимацией.

Как правило, это испытание на релаксацию напряжений, когда полная деформация представляет собой постоянную величину, и испытание на ползучесть, когда интенсивность растягивающего усилия постоянна, меняется суммарная деформация. Классические методы определения упругих и высокоэластических параметров широко известны, существуют ГОСТы. Однако, если определение упругих параметров, как правило, происходит без лишних усилий, то определение высокоэластических параметров сопряжено с достаточно длительными во времени процессами.

Профессором Б. М. Языевым совместно с учениками, была разработана методика определения физико-механических параметров полимера путём обработки и анализа именно кривых релаксации напряжений полимера [79, 80, 81, 82]. Будучи также учеником школы профессора Б. М. Языева автором настоящей диссертационной работы была доработана вышеуказанная методика применительно к обработке кривых ползучести полимера с последующим определением упругих и высокоэластических параметров полимера, о чём подробно будет рассказано в параграфе 2.2. В настоящем параграфе приводится подробный алгоритм данной методики.

Как упоминалось выше, полноценная оценка деформационных м прочностных свойств конструкции и её элементов исключительно по упругой стадии неверна, поскольку развитие обратимых и остаточных деформаций может приводить к существенному перераспределению напряжений в теле, что, в свою очередь, сказывается на скорости развития самих деформаций. Связано это с тем, что как показано в выражении (1.20), скорость высокоэластических деформаций является функцией как напряжений, так и самих деформаций. Ситуация осложняется тем, что в массовых литературных источниках приводятся только типовые параметры полимера, описывающих его свойства только с химической точки зрения; при этом для проведения механических расчётом на прочность, а тем более для использования в нелинейном обобщённом уравнении связи Максвелла-Гуревича, таковые данные встречаются крайне редко, и то, в неявном виде, к примеру, в виде кривых релаксации напряжений или ползучести материала [83, 84].

Для аппроксимации опытных данных авторами работ [83, 84] применялось интегральное уравнение Больцмана–Вольтера:

$$\sigma = \sigma_0 \left[1 - \int_0^t T(\tau)\, d\tau \right],$$

где σ — напряжение в заданный (текущий) момент времени t; σ_0 — напряжение в начальный момент времени $t = 0$; τ — переменная, изменяющая свои значения от 0 до t; $T(\tau)$ — ядро релаксации.

Рассмотрим ядро, имеющее довольно сложный вид:

$$T(\tau) = -\frac{S_0}{k_B m} \left[\frac{1}{\alpha \ln \alpha + (1-\alpha)\ln(1-\alpha)} - \frac{1}{\ln 0.5} \right],$$

где $m = m^* \int_0^\infty T^*(\tau)\,d\tau$; $T^*(\tau)$ — переменная часть ядра; k_B — постоянная Больцмана; m^* — общее число кинетических единиц (релаксаторов и нерелаксаторов в единице объёма); α — доля релаксаторов в общем числе кинетических единиц; S_0 — величина начальной энтропии системы.

При этом, параметр α является функцией от τ:

$$\alpha = \frac{1}{\left(1 + \frac{k^*}{\beta}\tau\right)^\beta},$$

где $k^* = k^{n-1}$; $\beta = \frac{1}{n-1}$; n — порядок реакции взаимодействия релаксаторов; k — постоянная скорости этого взаимодействия.

С теоретической точки зрения при обработке полученных экспериментальных данных интегральная форма уравнения имеет несколько преимуществ перед дифференциальной: удобство обработки опытных результатов и бóльшая точность конечного результата при описании процессов ползучести и релаксации. Если же говорить о практическом применении интегральной формы при решении поставленных задач, то нельзя не отметить возможные математические трудности в процессе. По этой причине в практике более удобной оказывается именно дифференциальная форма записи уравнений, а не интегральная.

Далее приводится алгоритм для определения на основе полученного в экспериментальных исследованиях графиков ползучести 2.1, которые определяются в параграфе 2.2 с целью определения физико-механических параметров нелинейного обобщённого уравнения связи Максвелла-Гуревича.

Как отмечалось в начале параграфа, все испытания основаны на центральном растяжении (сжатии), при котором в теле возникает одноосное, или линейное, напряжённое состояние. Поскольку экспериментальные данные проводятся при относительно малом периоде времени, они ограничиваются только одним спектром времён релаксации полимера. Тогда уравнение связи Максвелла-Гуревича может быть записано в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*}, \tag{2.1}$$

где ε_{cr} — деформация ползучести (высокоэластическая деформация); f^* — функция напряжений

$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr},$$

где E_∞ — модуль высокоэластичности.

Релаксационная вязкость η^* определяется выражением

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left\{-\frac{|f^*|}{m^*}\right\}, \tag{2.2}$$

где η_0^* — начальная релаксационная вязкость; m^* — модуль скорости.

Сумма компонентов упругой деформации и высокоэластической даёт полную деформацию ε

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_{el} + \varepsilon_{cr}(t) = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{cr}(t), \tag{2.3}$$

где E — мгновенный модуль упругости.

При проведении испытаний на ползучесть прикладывается постоянное по времени растягивающее усилие. Поскольку исследуются малые продольные деформации, то и поперечными можно пренебречь. В этом случае можно принять неизменность осевого напряжения в испытываемом образце. В нашем случае

$$\sigma = \text{const}.$$

Сразу в момент приложения нагрузки при $t = 0$ ч считается, что в теле высокоэластические деформации не успевают развиться, а присутствует только мгновенная упругая деформация. Следовательно, зная величину постоянного по времени напряжения и деформации в начальный момент времени, становится возможным нахождение модуля упругости E полимера:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon(0)}.$$

Зная модуль упругости материала, из выражения (2.3) на следующем этапе определяется высокоэластическая деформация ε_{cr} на каждом временно́м этапе:

$$\varepsilon_{cr}(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma}{E}. \tag{2.4}$$

Уравнение связи Максвелла-Гуревича, представленное в виде выражения (2.1) используется в дифференциальном виде и представляет собой скорость развития высокоэластических деформаций по времени (2.4), таким образом, на следующем этапе производится численное дифференцирование полученного вектора высокоэластических деформаций по времени:

$$\frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = -\frac{1}{E}\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{E}\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Произведём замену переменных. Для этого переменной υ обозначим скорость развития высокоэластических деформаций по времени $\frac{\partial \varepsilon_{cr}(t)}{\partial t}$. Численное нахождение производной не представляет большого труда в случае постоянного интервала времени, однако, при анализе результатов экспериментов добиться постоянства интервалов не всегда представляется возможным. Таким образом, возникает необходимость применения метода неопределённых коэффициентов с целью численного дифференцирования. С целью сокращения объёмов записи и облегчения восприятия информации, производную деформации по времени будем обозначать при помощи штриха $'$. На первом интервале времени (при $t_1 = 0$) возможна аппроксимация скорости деформаций по времени ε' при помощи линейного выражения, содержащего коэффициенты

перед деформациями в первых трёх точках: начальная и две последующие

$$\varepsilon_1' \approx c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2 + c_3\varepsilon_3. \tag{2.6}$$

Считается, что выражение (2.6) выполняется точно в том случае, если функция деформации ε является многочленом степени не выше «2», т. е. выражение (2.6) можно представить в виде

$$\varepsilon = 1; \qquad \varepsilon = t - t_1; \qquad \varepsilon = (t - t_1)^2. \tag{2.7}$$

Производные выражений (2.7) имеют вид

$$\varepsilon' = 0; \qquad \varepsilon' = 1; \qquad \varepsilon' = 2\,(t - t_1)\,. \tag{2.8}$$

Производим подстановку выражений (2.7) и (2.8) в (2.6):

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_1 - t_1) + c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_1) = 1; \\ c_1(t_1 - t_1)^2 + c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t_1)^2 = 2\,(t_1 - t_1)\,. \end{cases}$$

После упрощения выражения:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_2(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_1) = 1; \\ c_2(t_2 - t_1)^2 + c_3(t_3 - t_1)^2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, следующим этапом появляется возможность определения коэффициентов

$$\begin{aligned} c_1 &= -\left(\frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_1}\right); \\ c_2 &= \frac{1}{t_2 - t_1} + \frac{1}{t_3 - t_2}; \\ c_3 &= -\frac{1}{t_3 - t_2} + \frac{1}{t_3 - t_1}. \end{aligned}$$

Проверкой полученных коэффициентов является рассмотрение частного случая при $t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \Delta t$. Тогда выражение для ε_1' записывается так:

$$\varepsilon_1' \approx \frac{1}{2\Delta t}\left(-3\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 - \varepsilon_3\right).$$

Выражение производной промежуточных точек ($i = 2 \ldots n - 1$) может быть записано в виде:

$$\varepsilon_i' \approx c_1\varepsilon_{i-1} + c_2\varepsilon_i + c_3\varepsilon_{i+1}. \tag{2.9}$$

Последующие выкладки аналогичны тем, что были проделами для начальной точки. Неизвестные коэффициенты c_1, c_2, c_3 могут быть определены использованием следующих функций:

$$\varepsilon = 1; \qquad \varepsilon = t - t_i; \qquad \varepsilon = (t - t_i)^2,$$

производные которых имеют вид

$$\varepsilon' = 0; \qquad \varepsilon' = 1; \qquad \varepsilon' = 2(t - t_i).$$

В результате может быть получена система линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0; \\ c_1(t_{i-1} - t_i) + c_3(t_{i+1} - t_i) = 1; \\ c_1(t_{i-1} - t_i)^2 + c_3(t_{i+1} - t_i)^2 = 0. \end{cases}$$

Решение данной системы имеет вид:

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{1}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i}; \\ c_2 &= \frac{1}{t_i - t_{i-1}} - \frac{1}{t_{i+1} - t_i}; \\ c_3 &= -\frac{1}{t_{i+1} - t_{i-1}} + \frac{1}{t_{i+1} - t_i}. \end{aligned}$$

Оценить правильность полученных коэффициентов можно рассмотрением частного случая при постоянном интервале, т. е. $t_{i+1} - t_i = t_i - t_{i-1} = \Delta t$. Тогда численная производная высокоэластических деформаций по времени может быть записано известным выражением:

$$\varepsilon'_i \approx \frac{\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i-1}}{2\Delta t}.$$

В крайней точке временнóго периода ($t = n$) допускается не определять численно производную деформации, поскольку в конце периода скорость высокоэластических деформаций ε'_n асимптотически стремится к нулю:

$$\varepsilon'_n \approx 0.$$

Поскольку процесс ползучести полимера стремится к некоторому конечному значению, в котором скорость высокоэластических деформаций затухает, то становится возможным и определение модуля высокоэластических деформаций путём алгебраических преобразований:

$$\upsilon = \frac{\partial \varepsilon_{cr}}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*} = 0;$$

$$f^* = \sigma - E_\infty \varepsilon_{cr}; \tag{2.10}$$

$$E_\infty = \frac{\sigma(\infty)}{\varepsilon_{cr}(\infty)}.$$

Зная два параметра, возможно определить и оставшиеся: коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^* и модуль скорости m^*. Определяем релаксационную вязкость на каждом временно́м этапе:

$$\eta^*(t) = \frac{f^*(t)}{\upsilon(t)},$$

где $f^*(t)$ вычисляем в соответствии с выражением (2.10).

Следующим этапом логарифмизируется выражение для релаксационной вязкости η^* в (2.2):

$$\ln\eta^* = \ln\left[\eta_0^* \exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right)\right] = \ln\eta_0^* - \frac{|f^*|}{m^*}; \tag{2.11}$$

Анализируя выражение (2.11), делаем вывод, что между величинами $y = \ln\eta^*$ и $x = |f^*|$ имеется линейная зависимость

$$y = ax + b, \tag{2.12}$$

где $a = -\dfrac{1}{m^*}$; $b = \ln\eta_0^*$.

Получив ряд значений $\ln\eta^*$ для соответствующих функций напряжений $|f^*|$, можно подобрать коэффициенты a и b выражения (2.12), определив которые, найдём, соответственно, модуль скорости m^* и начальную релаксационную вязкость η_0^*.

2.2 Определение физико-механических параметров полимера

Согласно приведённой выше методике определения физико-механических параметров проведены лабораторные испытания стандартных образцов, изготовленных из эпоксидного полимера ЭДТ-10.

Для этого стандартные «лопатки» были испытаны при помощи универсальной испытательной машине WP-300 в лаборатории кафедры «Сопротивление материалов» Донского государственного технического университета. Поскольку задача проведения полноценных испытаний материала не ставилась, а ставилась задача «экспресс-анализа», исследовалось по три образца при двух режимах нагружения и постоянной температуре 20 °С. В первом режиме в образце создавалось постоянное растягивающее напряжение 24 МПа, а во втором — 12 МПа. Результаты опытных данных и теоретических исследований приведены на рисунке 2.1. Опытные данные, использованные для построения соответствующих графиков приведены в таблицах 2.1 и 2.2.

На основе кривой 1 опытных данных (рисунок 2.1) был проведён анализ и получены следующие физико-механические параметры эпоксидного полимера ЭДТ-10 при уровне нагружения 24 МПа:

Таблица 2.1 — Зависимость изменения деформаций эпоксидного полимера ЭДТ-10 с течением времени при $\sigma = 12$ МПа

t, ч	0	0.077	0.166	0.336	0.674	0.994	1.504	1.999	2.473
ε, %	0.511	0.553	0.553	0.565	0.565	0.565	0.570	0.575	0.577

Таблица 2.2 — Зависимость изменения деформаций эпоксидного полимера ЭДТ-10 с течением времени при $\sigma = 24$ МПа

t, ч	0	0.011	0.074	0.194	0.331	0.650	0.996	1.509	2.000	2.500
ε, %	1.057	1.181	1.259	1.308	1.310	1.327	1.375	1.385	1.430	1.440

$$\begin{aligned} E(24\,\text{МПа}) &= 2270.2\ \text{МПа};\\ E_\infty(24\,\text{МПа}) &= 6273.4\ \text{МПа};\\ m^*(24\,\text{МПа}) &= 6.3183\ \text{МПа};\\ \eta_0^*(24\,\text{МПа}) &= 9351.7\ \text{МПа}\cdot\text{ч}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для оценки достоверности полученных результатов была построена теоретическая кривая 2 на основе полученных физико-механических параметров из выражения (2.13).

На основе кривой 3 опытных данных (рисунок 2.1) был проведён анализ и получены следующие физико-механические параметры эпоксидного полимера ЭДТ-10 при уровне нагружения 12 МПа:

$$\begin{aligned} E(12\,\text{МПа}) &= 2346.4\ \text{МПа};\\ E_\infty(12\,\text{МПа}) &= 18182\ \text{МПа};\\ m^*(12\,\text{МПа}) &= 3.8190\ \text{МПа};\\ \eta_0^*(12\,\text{МПа}) &= 34985\ \text{МПа}\cdot\text{ч}, \end{aligned} \tag{2.14}$$

Для оценки достоверности полученных результатов была построена теоретическая кривая 4 на основе полученных физико-механических параметров из выражения (2.14).

Анализ рисунка 2.1 показывает весьма хорошую аппроксимацию опытных кривых 1 и 3 с соответствующими теоретическими кривыми 2 и 4. Особенно необходимо отметить совпадение графиков в конце рассматриваемого периода, что позволяет говорить о достоверности определения как упругих, так и высокоэластических параметров полимера.

Проведём анализ полученных значений физико-механических параметров эпоксидного полимера с некоторыми известными данными. Для этого будем использовать выражение со страницы 130 работы [85], приведённое на странице 57 в виде (4.1). Запишем значения параметров выражения (4.1) при температуре 20 °C:

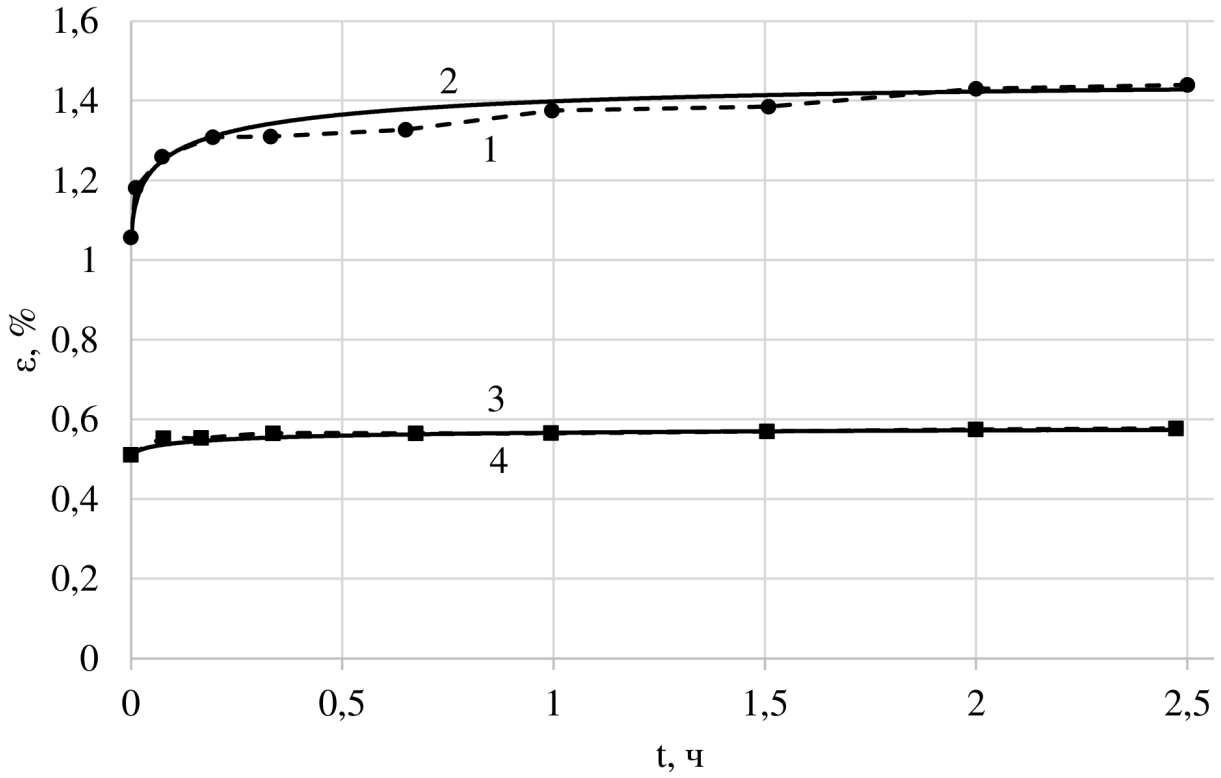


Рисунок 2.1 — Результаты сопоставления экспериментальных кривых (пунктирные линии) с теоретическими (сплошные линии): 1 — опытные данные при уровне нагружения 24 МПа; 2 — теоретическая кривая при уровне нагружения 24 МПа; 3 — опытные данные при уровне нагружения 12 МПа; 4 — теоретическая кривая при уровне нагружения 12 МПа

$$
\begin{aligned}
E(20\,^\circ\mathrm{C}) &= 3175\ \text{МПа};\\
E_\infty(20\,^\circ\mathrm{C}) &= 2550\ \text{МПа};\\
m^*(20\,^\circ\mathrm{C}) &= 4,53\ \text{МПа};\\
\eta_0^*(20\,^\circ\mathrm{C}) &= 60250\ \text{МПа}\cdot\text{ч}.
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

Как видно из сравнения значений физико-механических параметров, приведённых в выражениях (2.13) и (2.14) с выражением (2.15), наиболее близкое к выражению (2.15) оказывается (2.14), значения которых были определены при нагружении в 12 МПа.

Объяснить это можно двумя способами:

1. При нагружении 12 МПа требуется меньше времен, чем при 24 МПа. Соответственно, теряется меньше высокоэластических деформаций, развиваемых с момента роста нагружения.

2. Современные смолы могут несколько отличаться по свойствам от смол, изготавливаемых в 80–х годах XX века.

Несмотря на это, можно сказать, что предложенная методика определения физико-механических параметров по простым лабораторным испытаниям весьма пригодна.

Также предложенная методика апробирована на кривых ползучести безобжимных углеродно-эпоксидных композитных материалов в работе Н. П. Лоранди [86]. Были получены следующие

физико–механические параметры полимера, приведённые в таблице 2.3. Сопоставление экспериментальных точек с теоретической кривой приводится, построенной на основе определённых физико–механических параметров, приводится на рисунке 2.2.

Таблица 2.3 — Определённые физико–механические параметры безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов в работе Н. П. Лоранди

T, °C	E, МПа	E_∞, Мпа	m^*, МПа	η_0^*, МПа · ч
30	1326.9	2883.5	0.8426	195.7423
60	1039.5	1587.3	1.6658	87.5797
90	913.74	1627.3	2.0558	159.8009

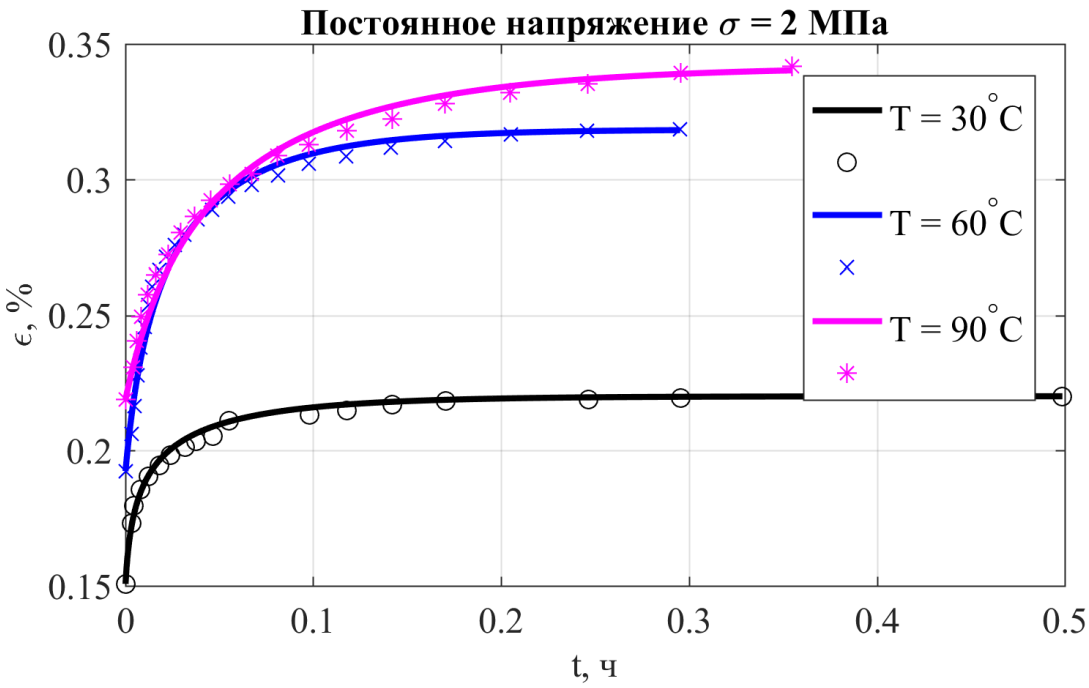


Рисунок 2.2 — Результаты сопоставления экспериментальных кривых (маркеры) с теоретическими (сплошные линии) при различных температурах в работе Н. П. Лоранди

Аппроксимация данных из таблицы 2.3 может быть проведена полиномом как функции температуры T и графически представлена на рисунке 2.3:

$$\begin{aligned} E(T) &= 0.0898T^2 - 17.6621T + 1.7759 \cdot 10^3 \text{ МПа;} \\ E_\infty(T) &= 0.7423T^2 - 110.0167T + 5.5159 \cdot 10^3 \text{ МПа;} \\ m*(T) &= 2.4067 \cdot 10^{-4}T^2 + 0.0491T + (-0.4138) \text{ МПа;} \\ \eta_0^*(T) &= 0.1002T^2 - 12.6246T + 484.2887 \text{ МПа} \cdot \text{ч.} \end{aligned} \tag{2.16}$$

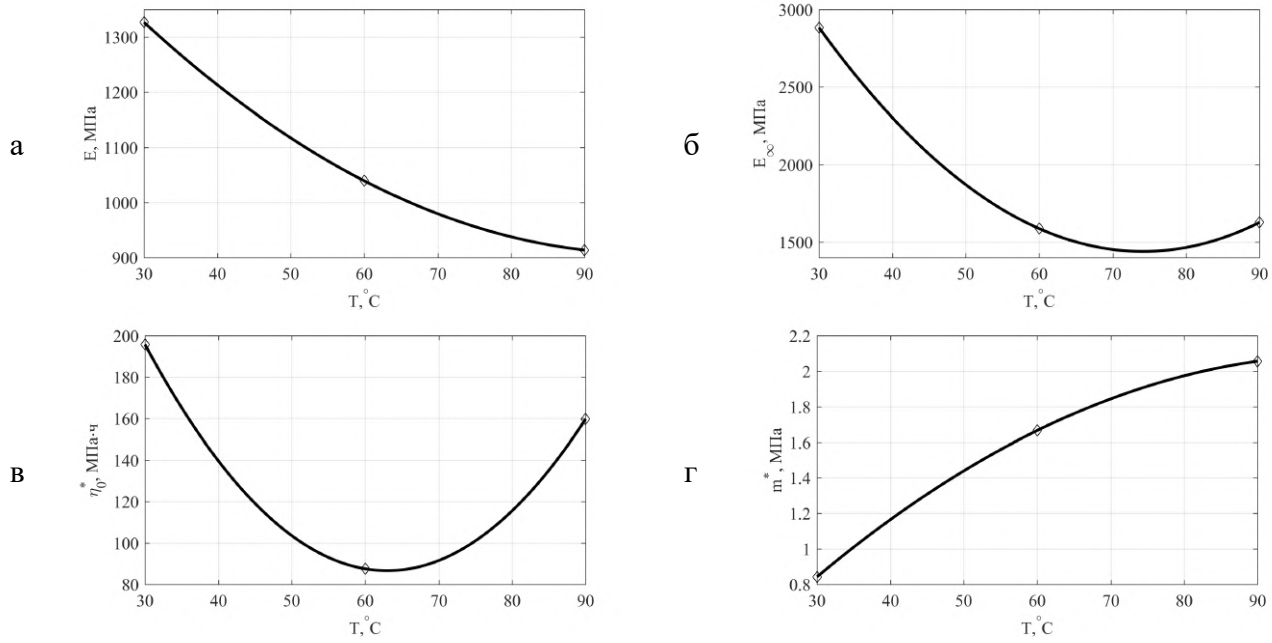


Рисунок 2.3 — Аппроксимация данных из таблицы 2.3 полиномом как функции температуры T

Ещё одним полимеров, у которого определены физико-механические свойства на основе кривых ползучести, явился стекло-эпоксидный полимер (Glass Epoxy Composite) [87]:

$$\begin{aligned} E &= 302.8926 \text{ МПа}; \\ E_\infty &= 2034.6 \text{ МПа}; \\ m^* &= 1.1509 \text{ МПа}; \\ \eta_0^* &= 4620.6 \text{ МПа} \cdot \text{ч}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Совпадение экспериментальных данных с теоретической кривой ползучести стекло–эпоксидного полимера приведено на рисунке 2.4.

2.3 Методика расчета задач с учётом ползучести материала

Все рассмотренные в диссертации задачи, в которых расчёт производится с учётом высокоэластических деформаций, решают численно одним из двух методов: конечных разностей (МКР) или конечных элементов (МКЭ). Представленный далее алгоритм расчёта справедлив для обоих методов.

Задачи рассматривают несвязные, т. е. на первом этапе определяют температурное поле в полимерном теле, на втором — вычисляют упругие и реологические параметры полимера в каждой точке (в случае МКР) и каждом конечном элементе (в случае МКЭ) в зависимости от распределения температурного поля. На третьем этапе определяют напряжённо-деформированное состояние в исследуемом теле.

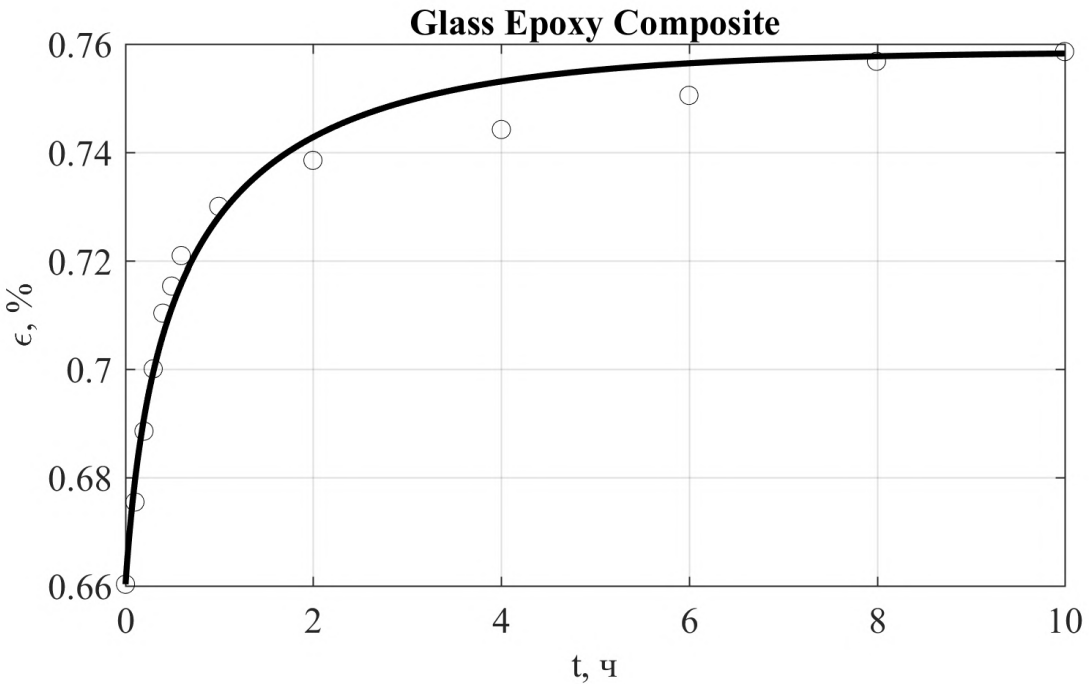


Рисунок 2.4 — Результаты сопоставления экспериментальных кривых (маркеры) с теоретическими (сплошные линии) стекло–эпоксидного полимера (Glass Epoxy Composite)

Третий этап состоит из нескольких подэтапов. Связано это с тем, что нелинейное уравнение Максвелла–Гуревича (2.1) содержит неизвестную высокоэластическую деформацию как в левой части (скорость высокоэластической деформации), так и в правой части (в функции напряжений и экспоненциальной зависимости коэффициента релаксационной вязкости). Таким образом, используется пошаговый метод, при котором в начальный момент времени ($t = 0$) считают, что все высокоэластические деформации отсутствуют, т. е. $\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s} = 0$. Остаётся определить напряжённо-деформированное состояние исходя только из упругой работы расчётной модели и скорость высокоэластической деформации на основе уравнения Максвелла–Гуревича (2.1). Предполагая, что временной интервал ($t = \Delta t$) достаточно мал, высокоэластическую деформацию на следующем временном интервале можно вычислить так:

$$\varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t_{i+1}) = \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t) + \frac{\partial \varepsilon_{cr,\zeta\zeta,s}(t)}{\partial t}(t_{i+1} - t).$$

Таким образом, используя данное уравнение можно определить на следующем временном этапе высокоэластическую деформацию, а зная её — напряжённо-деформированное состояние. Далее процесс повторяется циклично.

2.4 Выводы по главе

1. Подробно рассмотрено уравнение связи Максвелла–Гуревича, используемое во всех задачах настоящей диссертационной работы.

2. Предложена альтернативная методика определения параметров уравнения Максвелла–Гуревича, позволяющая найти их по анализу только графиков ползучести полимера.

3. Доказана работоспособность предложенной методики определения параметров уравнения Максвелла–Гуревича на основе проведённых лабораторных испытаний.

Глава 3. Основные разрешающие уравнения численных методов для определения НДС полимерного тела

В качестве уравнения связи напряжений и деформаций в настоящей работе используется обобщённое нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, наиболее полно подходящее для полимерных материалов. Поскольку данное уравнение связи отсутствует в современных программных комплексах (таких как ANSYS, Abaqus, Comsol и др.), программная реализация алгоритмов численного решения ложится на плечи исследователей.

Для начала необходимо рассмотреть расчётную схему, используемую в настоящей работе. Объектом исследований является цилиндрическое тело (рисунок 3.1) с внутренним радиусом R_a и внешним R_b. Как правило исследуются два случая, позволяющие значительно упростить конечные разрешающие уравнения: плоское деформированное состояние (ПДС), при котором считается, что наружный радиус цилиндра значительно меньше длины тела $l >> R_b$; плоское напряжённое состояние (ПНС), при котором считается, что длина цилиндра гораздо меньше его максимального радиуса, или, по-другому говоря, длиной цилиндра можно пренебречь $l \to 0$.

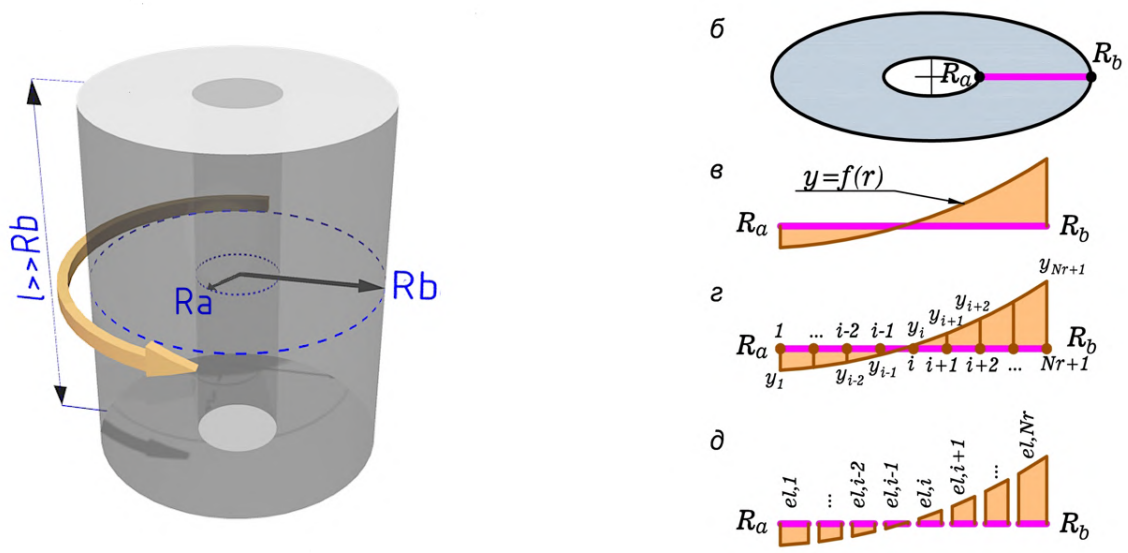


Рисунок 3.1 — Исходная схема осесимметричной задачи: *а* — исходный цилиндр; *б* — рассматриваемый участок цилиндра; *в* — непрерывная функция $y = f(x)$; *г* — аппроксимация функции конечными разностями; *д* — аппроксимация функции конечными элементами

В процессе исследования полимерного цилиндра рассматриваются несвязные задачи исследования на первом этапе температурного поля и последующего напряжённо-деформированного состояния (НДС). Граничными условиями для определения температурного поля являются температура соответственно на внутренней и внешней поверхностях тела, соответственно T_a и T_b. При определении НДС давление на внутренней и внешней поверхностях тела, соответственно P_a и P_b.

В случае, если рассматривается полимерное тело в упругой постановке и без учёта неоднородности материала, искомая функция может быть определена аналитическим решением (рисунок 3.1, в). Однако в диссертационной работе исследуются тела, имеющие градиент температуры по толще, а, следовательно, и выраженную косвенную неоднородность, поскольку физико-механические параметры полимеров являются значительной функцией температуры. Таким образом все решения задач будут получены при помощи численных методов: метода конечных разностей МКР (рисунок 3.1, г) и метода конечных элементов МКЭ (рисунок 3.1, д).

3.1 Основные уравнения метода конечных элементов и метода конечных разностей

3.1.1 Одномерный симплекс-элемент метода конечных элементов

Для получения решений задач в плоской одномерной постановке используется одномерный конечный элемент, представленный на рисунке 3.2, с узлами i и j, координаты которых X_i и X_j. Длина элемента определяется выражением $L = X_j - X_i$. Значения некоторой произвольной функции φ в узлах конечного элемента записываются Φ_i и Φ_j. В получении разрешающих уравнений будет использована глобальная система координат вместо локальной; в этом случае функция φ может быть аппроксимирована при помощи полинома [88]:

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 x. \tag{3.1}$$

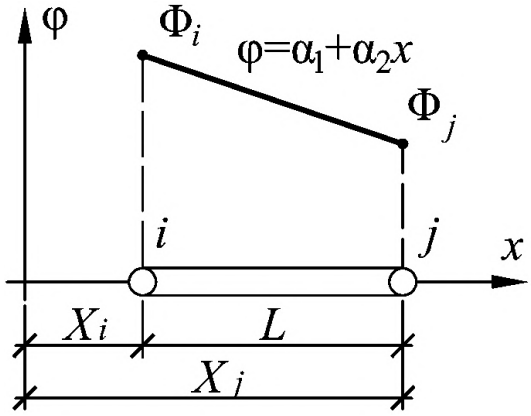


Рисунок 3.2 — Одномерный симплекс-элемент

В выражении (3.1) коэффициенты α_1 и α_2 могут быть определены при следующих граничных условиях:

$$\varphi = \Phi_i \quad \text{при} \quad x = X_i$$

и

$$\varphi = \Phi_j \quad \text{при} \quad x = X_j.$$

В результате может быть сформирована система линейных алгебраических уравнений

$$\Phi_i = \alpha_1 + \alpha_2 X_i;$$
$$\Phi_j = \alpha_1 + \alpha_2 X_j$$

решение которой может быть записано следующим выражением:

$$\varphi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j, \tag{3.2}$$

где $N_i = \dfrac{X_j - x}{X_j - X_i}$ и $N_j = \dfrac{x - X_i}{X_j - X_i}$ — интерполяционные функции (функции формы).

В реализации алгоритма решения задач при помощи метода конечных элементов соотношение (3.2) наиболее удобно использовать в матричной форме записи:

$$\varphi = \Big[N\Big] \Big\{\Phi\Big\}, \tag{3.3}$$

где $\Big[N\Big] = \Big[N_i \quad N_j\Big]$ — матричная строка; $\Big\{\Phi\Big\} = \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \end{Bmatrix}$ — вектор-столбец.

3.1.2 Аппроксимация функции методом конечных разностей

При решении задач определения физических полей, определения напряжённо-деформированного состояния и т. д. непременным элементом разрешающих уравнений является наличие дифференциала, который часто сводят к использованию производной функции $y = f(x)$, являющейся пределом отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Использование численных методов вызывает необходимость корректного численного дифференцирования вышеуказанной функции $y = f(x)$, для чего вводят [89, 90] на интервале $[a, b]$ сетку с равномерным шагом (рисунок 3.3):

$$\omega_x = \left\{ x_i = a + (i-1)\Delta x; \quad \Delta x = \frac{b-a}{N}; \quad i = 1, 2, \ldots, N+1 \right\}.$$

Неравномерная сетка имеет очень специфическое применение и поэтому в дальнейшем не рассматривается.

Следовательно приближённая аппроксимация производной в точке может быть записана:

$$y' \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

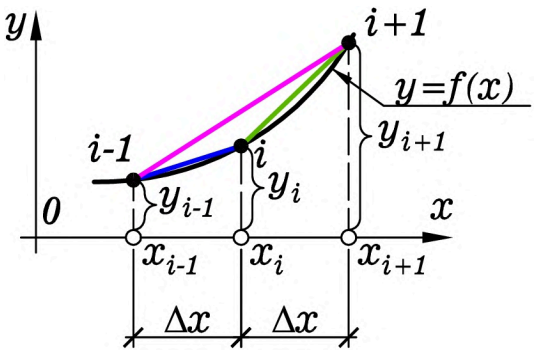


Рисунок 3.3 — Схема аппроксимации функции с помощью метода конечных разностей

В процессе реализации алгоритма численного решения задач, производная может быть определена как в центральной точке, так и в краевой:

— с помощью *левых разностей* (см. рисунок 3.3, синяя прямая):

$$\bigcirc\otimes \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + O(h); \tag{3.4}$$

— с помощью *правых разностей* (см. рисунок 3.3, зелёная прямая):

$$\otimes\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i; \quad \Delta x = h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} + O(h); \tag{3.5}$$

— с помощью *центральных разностей* (рисунок 3.3, фиолетовая прямая):

$$\bigcirc\times\bigcirc \quad \Delta y_i = y_{i+1} - y_{i-1}; \quad \Delta x = 2h; \quad y_i' \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2). \tag{3.6}$$

Путём комбинирования производных первого порядка (3.4) и (3.5) возможно получение выражения для определения производных старших порядков:

$$\bigcirc\otimes\bigcirc \qquad y_i'' = (y_i')' \approx \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right)' \approx \frac{\dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2). \tag{3.7}$$

Тем не менее в практической реализации аппроксимации функции $y = f(x)$ для повышения точности аппроксимации крайних точек i_1 и i_{N+1} по формулам (3.4) и (3.5) рекомендуется [90] использовать большее количество узлов, что приводит к повышению точности аппроксимации:

— аппроксимация производных первого порядка в случае пяти узлов:

$$
\begin{aligned}
y_1' &= \frac{-25y_1+48y_2-36y_3+16y_4-3y_4}{12h}+\frac{h^4}{5}y_*^V;\\
y_2' &= \frac{-3y_1-10y_2+18y_3-6y_4+y_5}{12h}-\frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_3' &= \frac{y_1-8y_2+8y_4-y_5}{12h}+\frac{h^4}{30}y_*^V;\\
y_4' &= \frac{-y_1+6y_2-18y_3+10y_4+3y_5}{12h}-\frac{h^4}{20}y_*^V;\\
y_5' &= \frac{3y_1-16y_2+36y_3-48y_4+25y_5}{12h}+\frac{h^4}{5}y_*^V,
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где y_*^V — значение производной пятого порядка в некоторой внутренней точке. При этом допускается в практике опускать слагаемые при h^4 вследствие малости значения шага h;

— аппроксимация производных второго порядка в случае пяти узлов:

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= \frac{35y_1-104y_2+114y_3-56y_4+11y_4}{12h^2}+O(h^3);\\
y_2'' &= \frac{11y_1-20y_2+6y_3+4y_4-y_5}{12h^2}+O(h^3);\\
y_3'' &= \frac{-y_1+16y_2-30y_3+16y_4-y_5}{12h^2}+O(h^4);\\
y_4'' &= \frac{-y_1+4y_2+6y_3-20y_4+11y_5}{12h^2}+O(h^3);\\
y_5'' &= \frac{11y_1-56y_2+114y_3-104y_4+35y_5}{12h^2}+O(h^3).
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Использование выражений (3.8) и (3.9) даёт возможность аппроксимации функции $y=f(x)$ любого n-го порядка точности. При этом могут быть использованы любые произвольные узлы $x=x_i,x_{i+1},\ldots$ при проведении замены индексов, что позволяет не ограничиваться узлами $x=x_1,x_2,\ldots$.

3.2 Определение переменного во времени температурного поля

В осесимметричной постановке температурное поле определяется при помощи уравнения (1.40) (с. 25), представляющего собой неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$
\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial T}{\partial t}. \tag{3.10}
$$

Поскольку все решения задач в настоящей работе реализованы при помощи численных методов, получение аналитического решения уравнения (3.10) становится нецелесообразно в связи со значительными трудозатратами.

Как в случае метода конечных разностей, так и метода конечных элементов, для аппроксимации выражения (3.10) по времени вводится равномерная сетка

$$\omega_t = \left\{ t_\rho = (\rho - 1)h_t; \quad h_t = \frac{t_{max}}{N_t}; \quad \rho = 1, 2, \ldots, N_t + 1 \right\},$$

где t_{max} — период времени, ограничивающий расчёт; N_t — количество интервалов по времени, по которым происходит аппроксимация решения.

В таком случае, согласно выражению для левых разностей (3.4), дифференциал температуры по времени

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_\rho - T_{\rho-1}}{h_t}.$$

Решение производят пошагово. На первом шаге происходит определение температурного поля в начальный момент времени, имеющий индекс $\rho = 1$; на данном этапе правая часть выражения (3.10) приравнивается нулю $f_{1,i} = 0$. На следующих этапах температура времени предыдущего шага является величиной известной, а самого текущего этапа — неизвестной. Процесс определения температурного поля происходит на всех этапах, вплоть до достижения конечного шага, имеющего индекс $\rho = N_t + 1$.

3.2.1 Решение с помощью метода конечных разностей

По толщине цилиндра на интервале $[R_a, R_b]$ вводится равномерная сетка:

$$\omega_r = \left\{ r_i = a + (i - 1)h_r; \quad h_r = \frac{R_b - R_a}{N_r}; \quad i = 1, 2, \ldots, N_r + 1 \right\}.$$

Так как температурное поле во времени непостоянно, то аппроксимация описывается двумя индексами: ρ — индексация узлов по времени и i — индексация узлов по толщине тела.

Для аппроксимации производных используются выражение (3.6) и (3.7):

$$\frac{T_{\rho,i+1}}{h_r^2} - \frac{2T_{\rho,i}}{h_r^2} + \frac{T_{\rho,i-1}}{h_r^2} + \frac{T_{\rho,i+1}}{2rh_r} - \frac{T_{\rho,i-1}}{2rh_r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_{\rho,i} - T_{\rho-1,i}}{h_t}.$$

Полученная разностная схема может быть представлены в виде системы сеточных уравнений:

$$a_i T_{\rho,i-1} + b_i T_{\rho,i} + c_i T_{\rho,i+1} = f_{\rho,i}; \quad (i = 2, 3, \ldots, N_r; \quad \rho = 1, 2, \ldots, N_t + 1);$$

$$T_{\rho,1} = T_{\rho,a}; \quad T_{\rho,N+1} = T_{\rho,b};$$

$$a_i = \frac{1}{h_r^2} - \frac{1}{2rh_r}; \quad b_i = \left(-\frac{2}{h_r^2} - \frac{1}{\varkappa \cdot h_t} \right); \quad c_i = \frac{1}{h_r^2} + \frac{1}{2rh_r}; \quad f_{\rho,i} = -\frac{T_{\rho-1,i}}{\varkappa \cdot h_t}.$$

Матрица полученной системы имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & & & \\ & \dots & \dots & \dots & & & & & \\ & & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & & \\ & & & a_i & b_i & c_i & & & \\ & & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & & \\ & & & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & & a_{N_r} & b_{N_r} & c_{N_r} \\ & & & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{\rho,1} \\ T_{\rho,2} \\ \dots \\ T_{\rho,i-1} \\ T_{\rho,i} \\ T_{\rho,i+1} \\ \dots \\ T_{\rho,N_r} \\ T_{\rho,N_r+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_a \\ f_{\rho,2} \\ \dots \\ f_{\rho,i-1} \\ f_{\rho,i} \\ f_{\rho,i+1} \\ \dots \\ f_{\rho,N_r} \\ T_b \end{Bmatrix}.$$

3.2.2 Решение с помощью метода конечных элементов

Уравнение теплопроводности Фурье (3.10) с учётом аппроксимации правой части по времени может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{\varkappa}\frac{T_\rho - T_{\rho-1}}{h_t}.$$

Поскольку величина температуры на предыдущем этапе $T_{\rho-1}$ является величиной определённой, то она остаётся в правой части; искомая величина T_ρ переносится в левую часть:

$$\varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) - \frac{1}{h_t}T_\rho = -\frac{1}{h_t}T_{\rho-1}.$$

Приводим полученное выражение к дивергентному виду:

$$-\operatorname{div}\left[\varkappa \operatorname{grad} T\right] + \frac{1}{h_t}T_\rho = f, \tag{3.11}$$

где $f = \dfrac{1}{h_t}T_{\rho-1}$.

Согласно (3.2) и (3.3) аппроксимация температуры по радиусу конечного элемента записывается:

$$T_\rho = \frac{R_j - r}{R_j - R_i}T_{\rho,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i}T_{\rho,j}; \quad T_{\rho-1} = \frac{R_j - r}{R_j - R_i}T_{\rho-1,i} + \frac{r - R_i}{R_j - R_i}T_{\rho-1,j}$$

или в матричном виде

$$T_\rho = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_\rho \end{Bmatrix}; \quad T_{\rho-1} = \begin{bmatrix} N \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} T_{\rho-1} \end{Bmatrix},$$

где $\begin{bmatrix} N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & N_j \end{bmatrix}$; $\begin{Bmatrix} T_\rho \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{\rho,i} \\ T_{\rho,j} \end{Bmatrix}$; $\begin{Bmatrix} T_{\rho-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_{\rho-1,i} \\ T_{\rho-1,j} \end{Bmatrix}$; $N_i = \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i}$ и $N_j = \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i}$.

В параграфе 1.6 приводится переход к функционалу, соответствующему поставленному эллиптическому уравнению. Тогда функционал уравнения (3.11):

$$\mathrm{Im}\left(T_\rho\right) = \int\limits_V \left[\varkappa\left(\mathrm{grad}\, T_\rho\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t}\right] dV - 2\int\limits_V \frac{1}{h_t} T_{\rho-1} T_\rho \, dV =$$

$$= \int\limits_V \left[\varkappa\left(\mathrm{grad}\, T_\rho\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t} - 2\frac{T_{\rho-1}T_\rho}{h_t}\right] dV. \quad (3.12)$$

Далее необходимо определить объём конечного элемента. На схеме 3.4 приведён типичный конечный элемент в осесимметричной постановке. Таким образом численно объём конечного элемента можно определить путём произведения высоты элемента h_z на площадь его основания $A_{\text{основ}}$, которая, в свою очередь, определяется как произведение ширины элемента dr на длину дуги, проходящей через центр тяжести основания, т. е.

$$dV \approx A_{\text{основ}} h_z = \theta r h_z dr = \theta r h_z dr,$$

где для линейного конечного элемента в случае плоской осесимметричной задачи $h_z = 1$; $\theta = 1$; $dr = R_j - R_i$. Тогда объём элемента можно записать как:

$$dV \approx r\, dr. \quad (3.13)$$

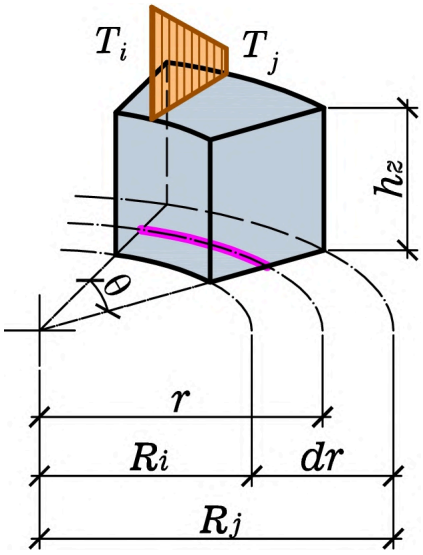


Рисунок 3.4 — Конечный цилиндрический элемент в осесимметричной постановке

Как было показано, объём элемента определяется выражением (3.13). Тогда функционал (3.12) может быть записан:

$$\mathrm{Im}\left(T_\rho\right) = \int\limits_{R_i}^{R_j} r\left[\varkappa\left(\frac{\partial T_\rho}{\partial r}\right)^2 + \frac{T_\rho^2}{h_t} - 2\frac{T_{\rho-1}T_\rho}{h_t}\right]dr. \tag{3.14}$$

Следующим этапом определяется минимум функционала по узловым значениям температуры, т. е. $\partial\,\mathrm{Im}/\partial T_\rho$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_{\rho,i}} = 0; \\ \dfrac{\partial\,\mathrm{Im}}{\partial T_{\rho,j}} = 0. \end{cases}$$

Матричное представление полученной системы уравнений имеет вид:

$$\left[k^{(e)}\right]\left\{T^{(e)}\right\} = \left\{f^{(e)}\right\}, \tag{3.15}$$

где $\left[k^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} k_{11}^{(e)} & k_{12}^{(e)} \\ k_{21}^{(e)} & k_{22}^{(e)} \end{bmatrix}$; $\left\{T^{(e)}\right\} = \begin{Bmatrix} T_{\rho,i}^{(e)} \\ T_{\rho,j}^{(e)} \end{Bmatrix}$; $\left\{f^{(e)}\right\} = \begin{Bmatrix} f_1^{(e)} \\ f_2^{(e)} \end{Bmatrix}$.

Коэффициенты системы уравнений (3.15) имеют вид:

$$\begin{aligned}
k_{11}^{(e)} &= \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\
k_{12}^{(e)} = k_{21}^{(e)} &= \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t} - \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\
k_{22}^{(e)} &= \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t} + \varkappa\frac{R_j + R_i}{R_j - R_i}; \\
f_1^{(e)} &= \frac{R_j^2 + 2R_iR_j - 3R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,i} + \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,j}; \\
f_2^{(e)} &= \frac{R_j^2 - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,i} + \frac{3R_j^2 - 2R_iR_j - R_i^2}{6h_t}T_{\rho-1,j};
\end{aligned}$$

3.2.3 Сравнение результатов, полученных численными методами

Рассмотрим анализ сходимости решений, полученных численными методами при различных количествах интервалов времени и шагов/узлов по радиусу. Расчётная схема приведена на рисунке 3.1, с. 40 при следующих исходных данных: $R_a = 0.008$ м; $R_b = 0.028$ м; $T_a = T_b = 28\,^\circ C$.

При решении методом конечных разностей тело по толщине вдоль радиальной оси аппроксимировалось сеткой, имеющей N_r интервалов; в случае конечно элементного решения размеры конечных элементов равнялись интервалам конечно разностной сетки. По времени

использовалось N_t интервалов. На внутренней поверхности задавался рост температуры в течение 1.2 ч до достижения $T_a = 100\,°C$. Процесс исследовали до времени 3.6 ч.

Результаты решения задачи при различных N_r и N_t приведены в таблице 3.1, и отражены на рисунке 3.5 при $N_t = 20$ и $N_r = 20$.

Таблица 3.1 — Сравнение результатов определения температуры при различном количестве интервалов N_r в точке $r = 0.018$ м методом конечных разностей (МКР), методом конечных элементов с предварительной аппроксимацией температуры по времени (МКЭ1) и последующей (МКЭ2) неоднородной задачи в конце заданного интервала времени

N_r, **шт.**	**10**	**40**	**100**	**400**	**1000**
$N_t = 10$					
МКР T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
$N_t = 100$					
МКР T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $°C$	53.4239	53.3952	53.3936	53.3933	53.3932
$N_t = 1000$					
МКР T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ1 T, $°C$	53.4241	53.3954	53.3937	53.3935	53.3934
МКЭ2 T, $°C$	53.4222	53.3934	53.3918	53.3915	53.3915

Как видно из таблицы 3.1, сходимость решения весьма хорошая и нет необходимости в использовании слишком густой сетки в МКР или большого числа конечных элементов в МКЭ.

3.3 Определение напряжённо-деформированного состояния неоднородного цилиндра с учётом температурного нагружения и деформациями ползучести

При решении плоских задач исследуют следующие виды напряжённо–деформированного состояния:

— Плоское деформированное состояние (ПДС). Предполагается, что осевые деформации вдоль оси z равны нулю, а напряжения вдоль этих осей имеют некоторое значение σ_z: $\varepsilon_z = 0$; $\sigma_z \neq 0$. Считается, что имеет место ПДС, если длина цилиндра значительно превышает его внешний радиус ($l \gg r$);

— Плоское напряжённое состояние (ПНС). Предполагается, что осевые напряжения на торцах σ_z равны нулю за счёт наличия осевых деформаций вдоль оси z: $\varepsilon_z \neq 0$; $\sigma_z = 0$. Считается, что имеет место ПНС, если длина цилиндра значительно меньше его внешнего радиуса ($l \ll r$).

Практическим примером ПДС являются трубы различного назначения; ПНС в чистом виде встречается весьма редко, и с практической точки зрения исследование ПНС оправдано в экспериментальных работах при изучении срезов цилиндрических тел [69, 85, 91, 92, 93]. Таким образом, дальнейшие выкладки приводятся для ПДС.

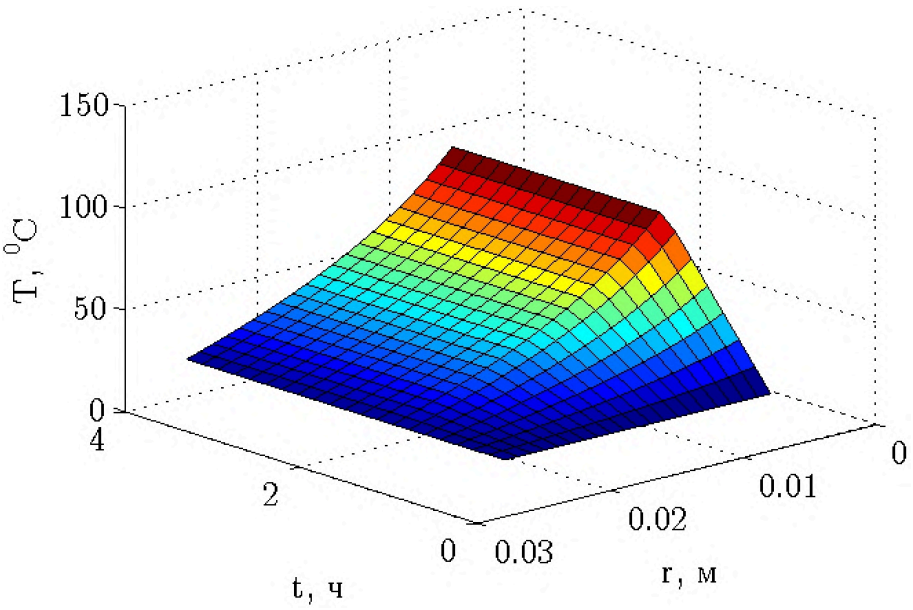


Рисунок 3.5 — Распределение температурного поля в течение 3.6 часов в толще цилиндра при росте температуры от 28 до $100\,^{\circ}C$ в течение 1.2 часа; $N_t = 20$, $N_r = 20$

Рассмотрим плоское деформированное состояние полого многослойного цилиндра. Материал каждого слоя обладает различными физико-механическими свойствами, которые являются непрерывной функцией от температуры, а следовательно, от координат r_j слоя: $E_j\left(T_j(r)\right) = E(r)$.

3.3.1 Решение в напряжениях с помощью метода конечных разностей

Для вывода основных разрешающих уравнений метода конечных разностей используют выражения из уравнений (1.30) и (1.32), с учётом, что для ПДС в осесимметричной постановке $\dfrac{\partial}{\partial\theta} = 0$:

Наличие осевой симметрии в плоской задаче значительно упрощает основные уравнения. Для достаточно длинного цилиндра (в случае ПДС) общее разрешающее уравнение можно получить из дифференциального уравнения равновесия с учетом центробежной силы (3.16), условия совместности деформаций (3.17) и закона Гука (3.18), учитывая, что полная деформация равна сумме упругой, температурной и высокоэластичной деформаций, и $\varepsilon_z = 0$.

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0; \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta - \varepsilon_r}{r} = 0; \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_r = \dfrac{1}{E}[\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)] + \varepsilon_T + \varepsilon_r^*; \\ \varepsilon_\theta = \dfrac{1}{E}[\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)] + \varepsilon_T + \varepsilon_\theta^*; \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_r + \sigma_\theta)] + \varepsilon_T + \varepsilon_z^* = 0, \end{cases} \tag{3.18}$$

где ε_r, ε_θ, ε_z — полные деформации вдоль соответствующих осей r, θ, z; σ_r, σ_θ, σ_z — нормальные напряжения вдоль соответствующих осей r, θ, z; ε_T — температурная деформация; ε_r^*, ε_θ^*, ε_z^* — деформации ползучести вдоль соответствующих осей r, θ, z; E — модуль упругости первого рода; ν — коэффициент Пуассона, который равен $\nu = 0.3$.

В случае МКР задача сводится к решению линейного дифференциального уравнения второго порядка относительно радиальных напряжений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r}\right)\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r}\sigma_r = \\ &\qquad = \left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{2-\nu}{r(1-\nu)}\right)R - \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{E}{r(1-\nu)}\frac{\partial \varepsilon_T}{\partial r} - \\ &\qquad\qquad - \frac{E}{r(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial \varepsilon_z^*}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_\theta^*}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^*}{r}\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Аппроксимируя уравнение (3.19) методом конечных разностей, получаем:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{h_r^2} - \frac{3}{2h_r r_i} + \frac{1}{E_i}\frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{4h_r^2}\right)\sigma_{r,i-1} - \\ &\qquad - \left(\frac{2}{h_r^2} + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\frac{1}{E_i}\frac{1}{r_i}\frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{2h_r}\right)\sigma_{r,i} + \\ &\qquad + \left(\frac{1}{h_r^2} + \frac{3}{2h_r r_i} - \frac{1}{E_i}\frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{4h_r^2}\right)\sigma_{r,i+1} = \\ &\quad = \left(\frac{1}{E_i}\frac{E_{i+1} - E_{i-1}}{2h_r} - \frac{2-\nu}{r_i(1-\nu)}\right)\rho\omega^2 r_i - \frac{\rho\omega^2(r_{i+1} - r_{i-1})}{2h_r} - \\ &\qquad - \frac{E_i}{r_i(1-\nu)}\alpha\frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2h_r} - \\ &\qquad - \frac{E_i}{r_i(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\varepsilon_{z,i+1}^* - \varepsilon_{z,i-1}^*}{2h_r} + \frac{\varepsilon_{\theta,i+1}^* - \varepsilon_{\theta,i-1}^*}{2h_r} + \frac{\varepsilon_{\theta,i}^* - \varepsilon_{r,i}^*}{r_i}\right). \end{aligned} \tag{3.20}$$

Матрица полученного уравнения (3.20) решается пошагово во времени, то есть реологические параметры материала на следующем шаге определяются из решения для текущего момента времени, и имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & a_{i-1} & b_{i-1} & c_{i-1} & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & a_{i+1} & b_{i+1} & c_{i+1} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{r,1} \\ \dots \\ \sigma_{r,i-1} \\ \sigma_{r,i} \\ \sigma_{r,i+1} \\ \dots \\ \sigma_{r,N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P_a \\ \dots \\ f_{i-1} \\ f_i \\ f_{i+1} \\ \dots \\ -P_b \end{Bmatrix}.$$

Здесь уже заложены граничные условия: $\sigma_{r1} = -P_a$; $\sigma_{r(N+1)} = -P_b$.

Как видно из приведённых выкладок: нигде не учитывается, используется теория по которой полная деформация ползучести (ε_{cr}) равна нулю, или нет.

Если считать нагружение мгновенным [91], то в момент времени $t = 0$ будут справедливы начальные условия: $\varepsilon^*_{r,0} = \varepsilon^*_{\theta,0} = 0$. Таким образом, на нулевом этапе приходим к упругой задаче.

3.3.2 Решение в перемещениях с помощью метода конечных элементов

Рассмотрим три выражения закона Гука в прямой форме с учетом температурной деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_\theta + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon^*_r; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\theta - \nu\left(\sigma_r + \sigma_z\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon^*_\theta; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right)\right] + \varepsilon_T + \varepsilon^*_z = 0. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Из третьего выражения (3.21) можно выразить напряжение вдоль оси z в следующем виде:

$$\sigma_z = \nu\left(\sigma_r + \sigma_\theta\right) - E\left(\varepsilon_T + \varepsilon^*\right).$$

Подставив полученную зависимость в оставшиеся два выражения закона Гука (3.21), получают два уравнения, которые выгодно для дальнейших расчетов представить в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \frac{1}{E}\begin{bmatrix} 1-\nu^2 & -\nu\left(1+\nu\right) \\ -\nu\left(1+\nu\right) & 1-\nu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} + \left(1+\nu\right)\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\varepsilon_T + \begin{bmatrix} 1 & 0 & \nu \\ 0 & 1 & \nu \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varepsilon^*_r \\ \varepsilon^*_\theta \\ \varepsilon^*_z \end{Bmatrix}. \tag{3.22}$$

Выразим из выражения (3.22) вектор напряжений, проведя операцию обращения матрицы, будет получена следующая зависимость:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} - \frac{E}{1-2\nu} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \varepsilon_T -$$

$$- \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu \\ \nu & 1-\nu & \nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r^* \\ \varepsilon_\theta^* \\ \varepsilon_z^* \end{Bmatrix}. \quad (3.23)$$

Введем замену

$$\Big[D\Big] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu \\ \nu & 1-\nu \end{bmatrix}.$$

Далее выражение (3.23) необходимо привести к виду:

$$\Big\{\sigma\Big\} = \Big[D\Big] \Big(\Big\{\varepsilon\Big\} - \Big\{\varepsilon_T\Big\} - \Big\{\varepsilon^*\Big\} \Big).$$

Полная энергия системы. Полная энергия системы Э представляет собой разность между энергией упругой деформации тела П и работой внешних сил A, где в случае ПДС энергия упругой деформации тела записывается:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int\limits_V \left(\sigma_r \varepsilon_{el,r} + \sigma_\theta \varepsilon_{el,\theta} \right) dV = \frac{1}{2} \int\limits_V \Big\{\sigma\Big\}^T \cdot \Big\{\varepsilon_{el}\Big\} dV, \quad (3.24)$$

где $\Big\{\sigma\Big\} = \Big[D\Big] \cdot \Big\{\varepsilon\Big\}$; $\Big\{\varepsilon_{el}\Big\} = \Big\{\varepsilon\Big\} - \Big\{\varepsilon_T\Big\} - \Big\{\varepsilon^*\Big\}$.

Полная деформация $\Big\{\varepsilon\Big\}$ определяется через выражение Коши:

$$\Big\{\varepsilon\Big\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ u/r \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Применяя метод МКЭ перемещение u можно представить через узловые значения следующим образом:

$$u = \Big[N\Big] \cdot \Big\{u\Big\}$$

где $\Big[N\Big]$ — матрица функций формы; $\Big\{u\Big\}$ — вектор перемещений.

$$\Big[N\Big] = \Big[N_i \quad N_j\Big] = \begin{bmatrix} \dfrac{R_j - r}{R_j - R_i} & \dfrac{r - R_i}{R_j - R_i} \end{bmatrix};$$

$$\Big\{u\Big\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix}.$$

Соотношение Коши (3.25), используя вышеупомянутые зависимости, можно представить в следующем виде:

$$\left\{\varepsilon\right\} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_j - R_i} & \dfrac{1}{R_j - R_i} \\ N_i/r & N_j/r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \left[B\right]\left\{U\right\}. \tag{3.26}$$

В выражении (3.24) вектор напряжений подлежит операции транспонирования. Так, вектор напряжений преобразуется в следующий вид:

$$\left\{\sigma\right\}^T = \left[\left[D\right]\cdot\left\{\varepsilon\right\}\right]^T = \left(\left\{U\right\}^T\cdot\left[B\right]^T\right)\cdot\left[D\right]. \tag{3.27}$$

После подстановки выражений (3.26) и (3.27) в (3.24), выражение для энергии упругой деформации преобразуется в:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(&\left\{U\right\}^T\left[B\right]^T\left[D\right] - \left\{\varepsilon_T\right\}^T\left[D\right] - \left\{\varepsilon^*\right\}^T\left[D\right]\Big)\times \\
&\times\Big(\left[B\right]\left\{U\right\} - \left\{\varepsilon_T\right\} - \left\{\varepsilon^*\right\}\Big)\,dV = \\
&= \frac{1}{2}\int\limits_V \Big(\left\{U\right\}^T\left[B\right]^T\left[D\right]\left[B\right]\left\{U\right\} - \left\{U\right\}^T\left[B\right]^T\left[D\right]\left\{\varepsilon_T\right\} - \\
&- \left\{U\right\}^T\left[B\right]^T\left[D\right]\left\{\varepsilon^*\right\} - \left\{\varepsilon_T\right\}^T\left[D\right]\left[B\right]\left\{U\right\} + \\
&+ \left\{\varepsilon_T\right\}^T\left[D\right]\left\{\varepsilon_T\right\} + \left\{\varepsilon_T\right\}^T\left[D\right]\left\{\varepsilon^*\right\} - \\
&- \left\{\varepsilon^*\right\}^T\left[D\right]\left[B\right]\left\{U\right\} + \left\{\varepsilon^*\right\}^T\left[D\right]\left\{\varepsilon_T\right\} + \left\{\varepsilon_T\right\}^T\left[D\right]\left\{\varepsilon^*\right\}\Big)\,dV.
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Работа внешних сил A с учётом того, что цилиндр подвергается вращению и задача решается методом конечных элементов, выглядит:

$$A = F\cdot U = F\left[N\right]\left[U\right], \tag{3.29}$$

где F — инерционные силы, возникающие в теле при вращении.

$$F = \rho\cdot dV\cdot\omega^2\cdot r. \tag{3.30}$$

Здесь ρ — плотность материала, dV — единицы объема, ω — угловая скорость и r — радиус вращения.

С учетом выражений (3.28) и (3.29) уравнение энергии системы имеет вид:

$$\text{Э} = \frac{1}{2}\int_V \Big(\left\{U\right\}^T \left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\} - \left\{U\right\}^T \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} - \\ - \left\{U\right\}^T \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} - \left\{\varepsilon_T\right\}^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\} + \\ + \left\{\varepsilon_T\right\}^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} + \left\{\varepsilon_T\right\}^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} - \left\{\varepsilon^*\right\}^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\} + \\ + \left\{\varepsilon^*\right\}^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} + \left\{\varepsilon_T\right\}^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} \Big) dV - F\left[N\right]\left[U\right]. \quad (3.31)$$

Получение матрицы жесткости и вектора нагрузок конечного элемента. Согласно вариационному принципу Лагранжа:

$$\frac{\text{Э}}{\partial\left\{U\right\}} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\text{Э}}{\partial\left\{U\right\}} = \frac{1}{2}\int_V \Big(2\left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\} - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} - \\ - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} \Big) dV - F\left[N\right]^T = \\ = \int_V \Big(\left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] \left\{U\right\} - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} - \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} \Big) dV - F\left[N\right]^T = 0. \quad (3.32)$$

Проведя ряд математических операций, уравнение с использованием метода конечных элементов имеет вид:

$$\left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] r\left(R_j - R_i\right) \left\{U\right\} = \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} r\left(R_j - R_i\right) + \rho\omega^2 r^2 \left(R_j - R_i\right) \left[N\right]^T. \quad (3.33)$$

Далее выражение (3.33) необходимо привести к виду:

$$\left[K\right] \cdot \left\{U\right\} = \left\{F\right\},$$

где $\left[K\right] = \sum_{e=1}^{E} \left[k^{(e)}\right]$ — глобальная матрица жёсткости; $\left\{F\right\} = \sum_{e=1}^{E} \left\{f^{(e)}\right\}$ — глобальный вектор нагрузки.

Элементы этих матрицы и вектора определяются соотношениями:

$$\left[k^{(e)}\right] = \left[B\right]^T \left[D\right] \left[B\right] r\left(R_j - R_i\right); \\ \left\{f^{(e)}\right\} = \Big(\left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon_T\right\} + \left[B\right]^T \left[D\right] \left\{\varepsilon^*\right\} \Big) r\left(R_j - R_i\right) + \\ + \rho\omega^2 r^2 \left(R_j - R_i\right) \left[N\right]^T. \quad (3.34)$$

3.4 Выводы по главе

1. Получены разрешающие уравнения для определения температурного поля, изменяющегося во времени.

2. Получены разрешающие уравнения для определения напряжённо-деформированного состояния полимерного тела с учётом возникающей косвенной неоднородности и наличия высокоэластических деформаций.

Глава 4. Моделирование напряжённо-деформированного состояния вращающегося тела

В настоящей главе моделируется напряжённо-деформированное состояние полого цилиндрического полимерного тела, имеющего следующие геометрические параметры: $r_a = 8$ мм; $r_b = 28$ мм; $P_a = 0$ МПа; $P_b = 0$ МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 100 шт.

Материал тела имеет следующие теплофизические [94] и физико-механические параметры [85, 95, 96]:

$$
\begin{aligned}
\lambda &= 0.17\,\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot\text{град}};\\
\rho &= 1250\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3};\\
c &= 0.35\,\frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot\text{град}};\\
\nu &= 0.3;\\
E &= -17.5T + 3525\ \text{МПа};\\
E_\infty &= -30T + 3150\ \text{МПа};\\
m^* &= -0.011T + 4.75\ \text{МПа};\\
\eta_0^* &= 104430\exp(-0.0275T)\ \text{МПа}\cdot\text{ч},
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

где λ — коэффициент теплопроводности; ρ — плотность материала; c — удельная теплоёмкость материала; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль упругости; E_∞ — модуль высокоэластичности; m^* — модуль скорости; η_0^* — коэффициент начальной релаксационной вязкости.

4.1 Исследование вращения цилиндра из ЭДТ–10 при больших частотах

В представленных далее задачах рассматривается высокая частота в 1000 оборотов в секунду. В практике такая частота практически не встречается, однако здесь она используется для более выраженного эффекта от вращения. Частота выбиралась таким образом, чтобы напряжения не превышали допускаемых значения для данного материала и развивающиеся деформации не превышали величины, после которого теория малых перемещений перестаёт работать.

4.1.1 Задача 4.1. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении

Исследуется напряжённо-деформированное состояние цилиндрического тела при изменении частоты его вращения от 0 до 1000 с$^{-1}$. При этом выбрано четыре режима, при которых

распределение температуры (20, 40, 60 и 80 °C) в цилиндре одинаково во всех точках. Модуль упругости материала $E(T)$ изменяется в соответствии с выражением (4.1):

$$E\,(20\,°\mathrm{C}) = 3175\,\text{МПа};$$
$$E\,(40\,°\mathrm{C}) = 2825\,\text{МПа};$$
$$E\,(60\,°\mathrm{C}) = 2475\,\text{МПа};$$
$$E\,(80\,°\mathrm{C}) = 2125\,\text{МПа}.$$

Результаты расчёта представлены на рисунках 4.1–4.5 (страницы 64–66). На данных рисунках графики соответствуют следующим температурным режимам: а — температура $T = 20\,°\mathrm{C}$; б — температура $T = 40\,°\mathrm{C}$; в — температура $T = 60\,°\mathrm{C}$; г — температура $T = 80\,°\mathrm{C}$.

Прежде чем проводить анализ полученных графиков, необходимо определиться с их возможным видом и используемой терминологией. На рисунке 4.1 приводятся результаты распределения окружных напряжений σ_θ при температуре материала цилиндра, равной 20 °C. График (а) называется «поверхность» и представляет собой черный линии, проведённые через заданные точки, с закрашенной между ними областью определённого цвета, отражающего градиент. График (б) называется «сеть» и представляет собой цветные линии, окрашенные в соответствии с градиентов, отражающим значения функции в конкретной точке. Как правило, если не сказано иного, в главе 4 и параграфе 4.1.5 решения, полученные при помощи метода конечных разностей (МКР) выводятся поверхностями, а полученные методом конечных элементов (МКЭ) — сетью.

На всех рисунках настоящего параграфа происходило наложение поверхностей и сетей друг на друга, что позволяло оценить достоверность результатов путём сравнения решений, полученных разными методами. Небольшое несовпадение поверхностей и сетей объясняется тем, что результаты МКР (поверхности) построены по значениям функций в узлах, а результаты МКЭ (сети) — в центрах тяжести конечных элементов. Так рисунок 4.3, а представляет собой наложение графиков (а) и (б), приведённых на рисунке 4.1.

Анализ представленных результатов расчёта показывает, что уровень напряжений (радиальных, окружных и осевых) меняется весьма несущественно и практически не зависит от температуры тела и, следовательно, от изменения модуля упругости. Существенное влияние оказывается только на уровень перемещений u, который вследствие уменьшения модуля упругости тела (при изменении температуры от 20 до 80 °C) увеличивается практически в 1.5 раза.

Таким образом, следующим этапом представляет интерес исследования переменного по радиусу температурного поля $T(r)$.

4.1.2 Задача 4.2. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры

Следующим был рассмотрен вопрос исследования напряжённо-деформированного состояния цилиндра при наличии градиента температуры по его толщине (в радиальном направлении). Методика определения температурного поля подробно изложена в параграфе 3.2 (стр. 44). Рассматривалось два варианта изменения температурного поля: I — температура меняется от 20 °C на внутренней поверхности цилиндра до 80 °C на внешней; II — температура меняется наоборот, от 80 °C на внутренней поверхности цилиндра до 20 °C на внешней.

Первым этапом проводилась оценка совпадения результатов, полученных двумя методами МКР и МКЭ. Для оценки влияния на напряжённо-деформированное состояние изменения модуля упругости, решение МКР было получено при постоянном по толщине модуле упругости, определённом при температуре на внутренней поверхности, а при МКЭ — на внешней поверхности. При этом модуль упругости по толщине цилиндра был величиной постоянной.

Результаты расчёта представлены на рисунке 4.6 (страница 67. Здесь графики «а», «в», «д», «ж» и «и» соответствуют задаче I, а графики «б», «г», «е», «з» и «к» — задаче II.

Анализ полученных результатов показывает, что напряжённо-деформированное состояние не зависит от величины модуля упругости, если он является постоянным по всей толщине цилиндра.

4.1.3 Задача 4.3. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры и наведённой неоднородности материала

В отличии от предыдущего, в настоящем параграфе проводится сравнение напряжённо-деформированного состояния, определённого при постоянном по толщине цилиндра модуле упругости, и модуле упругости, изменяющимся по толщине цилиндра в зависимости от температуры.

Решение методом конечных элементов (сеть) было получено с учётом неоднородности модуля упругости, а методом конечных разностей — модуль упругости постоянен по толщине и определён при температуре на внешней поверхности.

Изменение температурного поля принято как и в предыдущем параграфе: I — температура меняется от 20 °C на внутренней поверхности цилиндра до 80 °C на внешней; II — температура меняется наоборот, от 80 °C на внутренней поверхности цилиндра до 20 °C на внешней.

Результаты расчёта представлены на рисунке 4.7 (страница 68. Здесь графики «а», «в» и «д» соответствуют задаче I, а графики «б», «г» и «е» — задаче II.

Анализ полученных результатов показывает, что учёт неоднородности, вызванной изменением модуля упругости материала цилиндра от температуры, приводит к изменению

напряжённо-деформированного состояния, по окружным, максимальным, напряжениям не превышающего 10–15 %.

В случае задачи I постоянный модуль упругости определялся при температуре 80 °C (решение МКР) и был постоянным по толщине цилиндра. При этом, в случае переменного модуля упругости, на внутренней поверхности он был значительно выше, чем на внешней. Более высокие значения модуля упругости на внутренней поверхности и определили больший уровень напряжений, так как материал математически не мог претерпевать такие деформации, как в случае большего по значению постоянного модуля упругости.

И наоборот, в случае задачи II постоянный модуль упругости определялся при температуре 20 °C (решение МКР). При этом переменный модуль упругости достигал такого высоко значения только на внешней поверхности. Соответственно, решение при помощи МКР даёт бóльшие значения напряжений, чем решение МКЭ.

4.1.4 Задача 4.4. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры, наведённой неоднородности материала и реологии

В настоящей главе исследуется главная особенность полимерных изделий — выраженные высокоэластические деформации. Рассматриваются следующие постановки задач: задача I — температура одинакова по всей толщине цилиндра и составляет 20 °C; задача II — температура одинакова по всей толщине цилиндра и составляет 60 °C; задача III — температура меняется от 20 °C на внутренней поверхности цилиндра до 60 °C на внешней поверхности цилиндра; задача IV — температура меняется от 60 °C на внутренней поверхности цилиндра до 20 °C на внешней поверхности цилиндра. Количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; количество интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 2 500 шт. Расчёт продолжался до периода времени, равного 50 ч, соответственно один интервал времени соответствует 1 минуте 12 секундам. При решении задач I, III и IV частота вращения на всем этапе вычислений была постоянная и составляла 1 000 $с^{-1}$. При решении задачи II частота вращения на всем этапе вычислений также была постоянная и составляла 950 $с^{-1}$; при увеличении частоты свыше 950 $с^{-1}$ и вследствие значительного снижения физико-механических параметров от температуры по всей толще цилиндра развивались значительные деформации и происходило вырождение матричного исчисления на этапе решения систем уравнений.

Результаты решений представлены на рисунках 4.8–4.21 (страницы 69–75). При этом графики «а» соответствуют решению задачи I, «б» — задачи II, «в» — задачи III, «г» — задачи IV.

Во всех представленных расчётах самый первый этап представляет собой работу исключительно в упругой стадии, т. е. при полном отсутствии высокоэластических деформаций.

Радиальные напряжения σ_r в четырёх случаях изменяются весьма незначительно, но наименьшие значения радиальных напряжений наблюдаются при задаче IV (рисунок 4.8).

После упругой стадии наблюдается кратковременное незначительное снижение напряжений, обусловленное неустановившейся ползучестью с последующим их ростом. Окончательные напряжения оказываются мало отличимы от упругой стадии.

Разница в окружных напряжениях σ_θ более заметна. Наибольшие значения напряжений достигают в задаче II, наименьшие в задаче III (рисунок 4.9). Уровень напряжений в задаче II оказывается примерно на 25–30 % выше, чем в задаче III. Кроме того, в самом начале на графиках окружных напряжений отчётливо видны скачки, представляющие собой явление неустановившейся ползучести. Данное явление характерно для всех полимерных материалов. Если же говорить об отличии уровня напряжений в конце расчётного периода по сравнению с упругой стадией, то их изменение весьма незначительное.

Осевые напряжения σ_z (рисунок 4.10) демонстрируют наибольшие изменения уровня напряжений при учёте высокоэластических составляющих. Отличие конечных напряжений от упругой стадии отличается в большую сторону до 60 %. Общий уровень напряжений совпадает во всех случаях, кроме задачи III, когда наблюдается более низкий уровень напряжений.

Весьма существенны изменения уровня перемещений u (рисунок 4.11) в образце, так они вырастают более чем в 2.5 раза по сравнению с упругой стадией, что особенно важно учитывать при таких значительных оборотах, даже не смотря на их общую малость (порядок цифр 10^{-4}).

Анализ упругих ε_{el} и высокоэластических деформаций ε_{cr} (рисунки 4.12–4.17) показывает, что они имеют один порядок 10^{-2}. Таким образом, высокоэластическая составляющая вносит значительный вклад в напряжённо-деформированное состояние тела и ей ни в коем случае пренебрегать нельзя.

Для оценки достоверности полученных результатов, помимо сравнений решений, полученных при помощи МКР и МКЭ, использовались ещё два подхода.

Первый заключается в том, что в связи с исследованием плоского деформированного состояния (ПДС) должна отсутствовать осевая деформация, т. е. $\varepsilon_z = 0$. На рисунке 4.20 представлены графики распределения осевых деформаций по толще тела в различные моменты времени. Порядок цифр составляет $10^{-19} \div 10^{-18}$, что является допустимой погрешностью и по сравнению с уровнями упругих и высокоэластических деформаций позволяет говорить о точности полученных результатов.

Второй заключается в гипотезе, использованной в уравнении Максвелла-Гуревича о равенстве нулю суммы осевых составляющих высокоэластических деформаций, т. е. $\sum \varepsilon_{cr} = \varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z} = 0$. На рисунке 4.21 представлены графики распределения сумм осевых составляющих высокоэластических деформаций всех четырёх задач. Порядок цифр составляет 10^{-17}, что также свидетельствует в пользу достоверности полученных результатов.

Основной вывод настоящего параграфа 4.1.4 можно сделать следующий, что напряжённо-деформированное состояние полимерного вращающегося цилиндра меняется весьма значительно при учёте высокоэластических деформаций. При этом наибольший рост напряжений происходит только по осевому направлению (до 60 %) по сравнению с упругой работой материала. Если же говорить про возможные перемещения в образцах, то они могут быть выше более чем в 2.5 раза по

сравнению с упругой стадией, что особенно важно учитывать при таких значительных оборотах, даже не смотря на их общую малость (порядок цифр 10^{-4}).

4.1.5 Задача 4.5. Моделирование НДС цилиндра при изготовлении изделия

4.1.5.1 Постановка задачи

В главе 4 представлено моделирование напряжённо-деформированного состояния (далее — НДС) вращающегося цилиндрического тела с учётом температурной неоднородности и, соответственно, косвенной неоднородности материала, выраженной в изменении его физико-механических параметров (упругих и высокоэластических). Показано, наибольшее изменение НДС наблюдается при наличии температурного поля и, как следствие, изменении параметров материала. В случае множественных технологических процессов изготовление изделий также может производиться в условиях температурного нагружения. Следовательно, становится вопрос об исследовании возможных остаточных напряжений, возникающих в теле в процессе его производства.

В настоящей главе моделируется напряжённо-деформированное состояние полого цилиндрического полимерного тела, свойства которого были описаны в главе 4 и имеющего следующие геометрические параметры: $r_a = 8$ мм; $r_a = 28$ мм; $P_a = 0$ МПа; $P_b = 0$ МПа; количество интервалов разбиения по радиусу (МКР) или количество конечных элементов (МКЭ) 100 шт.; временной интервал 50 часов при количестве интервалов разбиения по времени (линейная интерполяция) 3 000 шт., таким образом каждый шаг времени соответствует 1 мин.

Было решено две задачи: в обоих случаях с самого начала цилиндр вращался с частотой $1\,000\,\text{с}^{-1}$ до точки времени, соответствующей 10 ч; далее считалось, что цилиндр остановился и его частота равна 0. В случае задачи №1 температура цилиндра принималась равной 20 °C на всём протяжении расчёта. В случае задачи №2 от начала и до точки времени, соответствующей 10 ч, температура на внутренней поверхности была равна 20 °C, а на внешней — 60 °C. С момента времени 10 ч температура на внешней поверхности снижалась с постоянной скоростью до 20 °C в течении 2 ч и дальше не менялась (рисунок 4.22). Зависимости физико-механических параметров полимера от температуры описываются выражениями (4.1) и представлены на рисунке 4.23 (страница 77). Результаты расчётов представлены на рисунках 4.24—4.37 (страницы 78—91).

4.1.5.2 Анализ полученных результатов

Анализ задачи №1 (без градиента температуры) показывает, что после снятия нагрузки в виде вращения цилиндра к моменту времени 50 ч напряжения и деформации приближаются к нулю. При этом напряжения задачи №2 имеют остаточные величины.

Приведём величины остаточных напряжений задачи №2 на последнем этапе времени, соответствующем 50 ч: максимальное значение радиального напряжения составляет $\sigma_{r,\max} = -1.0672$; окружное напряжение на внутренней точке составляет $\sigma_\theta(r = 0.008) = -5.08841$; окружное напряжение на внешней точке составляет $\sigma_\theta(r = 0.028) = 2.34305$; осевое напряжение на внутренней точке составляет $\sigma_z(r = 0.008) = -2.03025$; осевое напряжение на внешней точке составляет $\sigma_z(r = 0.028) = 5.50166$; перемещение внутренней точки составляет $u(r = 0.008) = -2.22566 \cdot 10^{-5}$; перемещение внешней точки составляет $u(r = 0.028) = -8.63852 \cdot 10^{-5}$. Таким образом наблюдается общая усадка всего материала цилиндра. При этом на внутренней поверхности цилиндра преобладает сжатие, а на внешней — растяжение. Максимальные по модулю напряжения достигают практически 10 % от допускаемых напряжений для эпоксидного полимера термического отверждения, составляющего порядка 50 МПа, что является весьма существенной величиной, которой нельзя пренебрегать при учёте дальнейшей эксплуатации изделия.

Отличительной чертой высокоэластических процессов является наличие явления неустановившейся ползучести, проявляемой всплесками напряжений σ_r, σ_θ и σ_z сразу после приложения или снятии нагрузки, что отчётливо видно на соответствующих графиках.

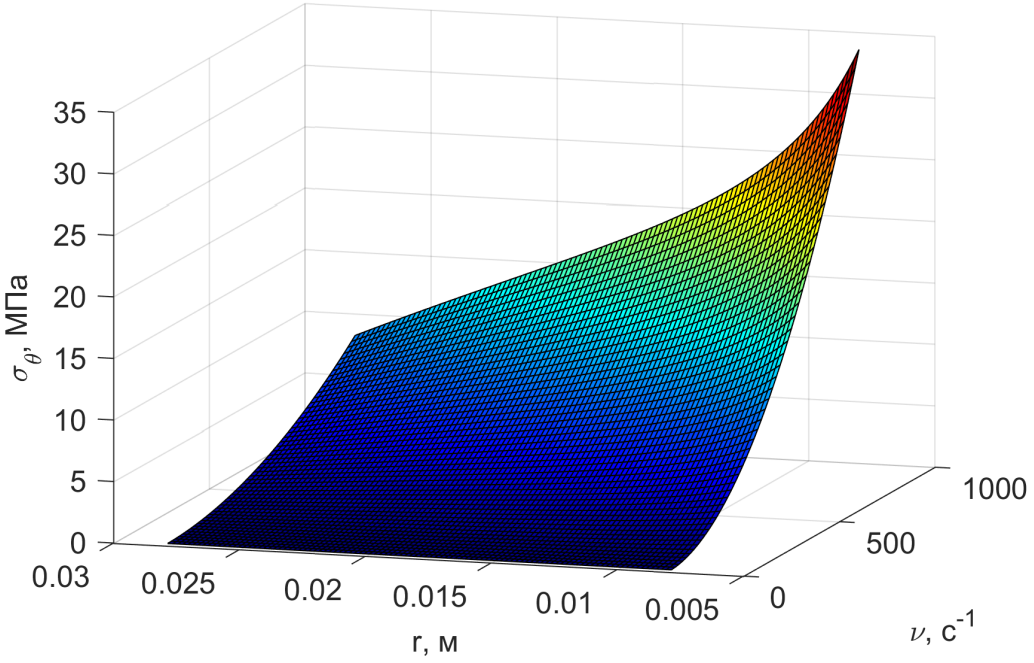
Проведём анализ составляющих деформаций стержня.

Во-первых, необходимо ответить, что упругая деформация ε_{el} (рисунки 4.28–4.30), что в случае задачи №1, так и задачи №2, на порядок ниже высокоэластической составляющей ε_{cr} (рисунки 4.31–4.33).

Во-вторых, упругая составляющая достаточно быстро угасает после снятия динамической нагрузки. В случае задачи №2 имеются некоторые остаточные составляющие упругой деформации, возникающей в следствии усадки материала тела.

В-третьих, несмотря на то, что уровень напряжений задач №1 и №2 схож, значения перемещений и деформаций задачи №2 в 1.5–2 раза выше, чем задачи №1.

а



б

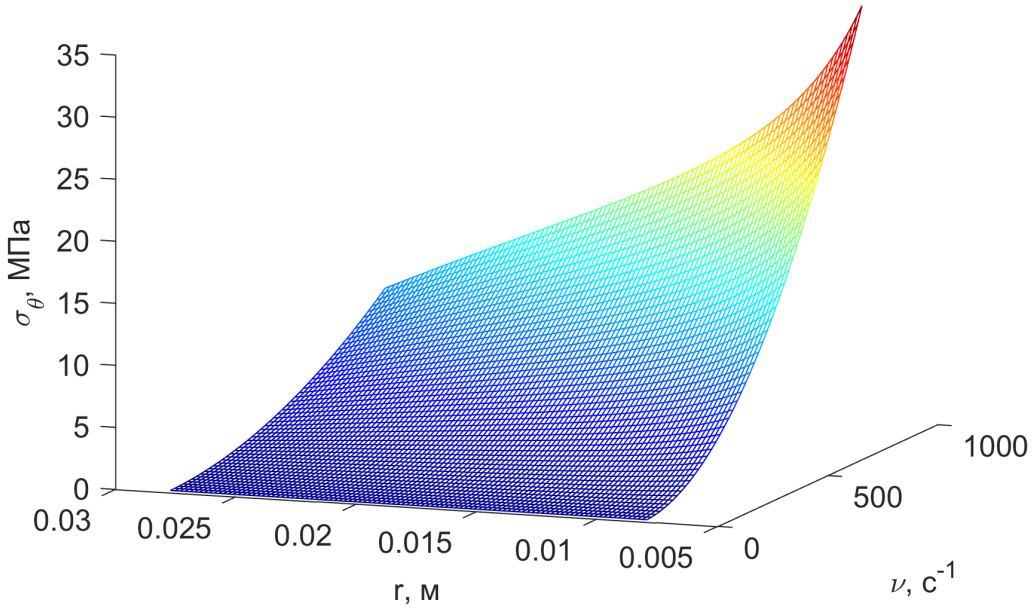


Рисунок 4.1 — Задача 1. Пример отображения результатов расчёта: а — поверхность; б — сеть

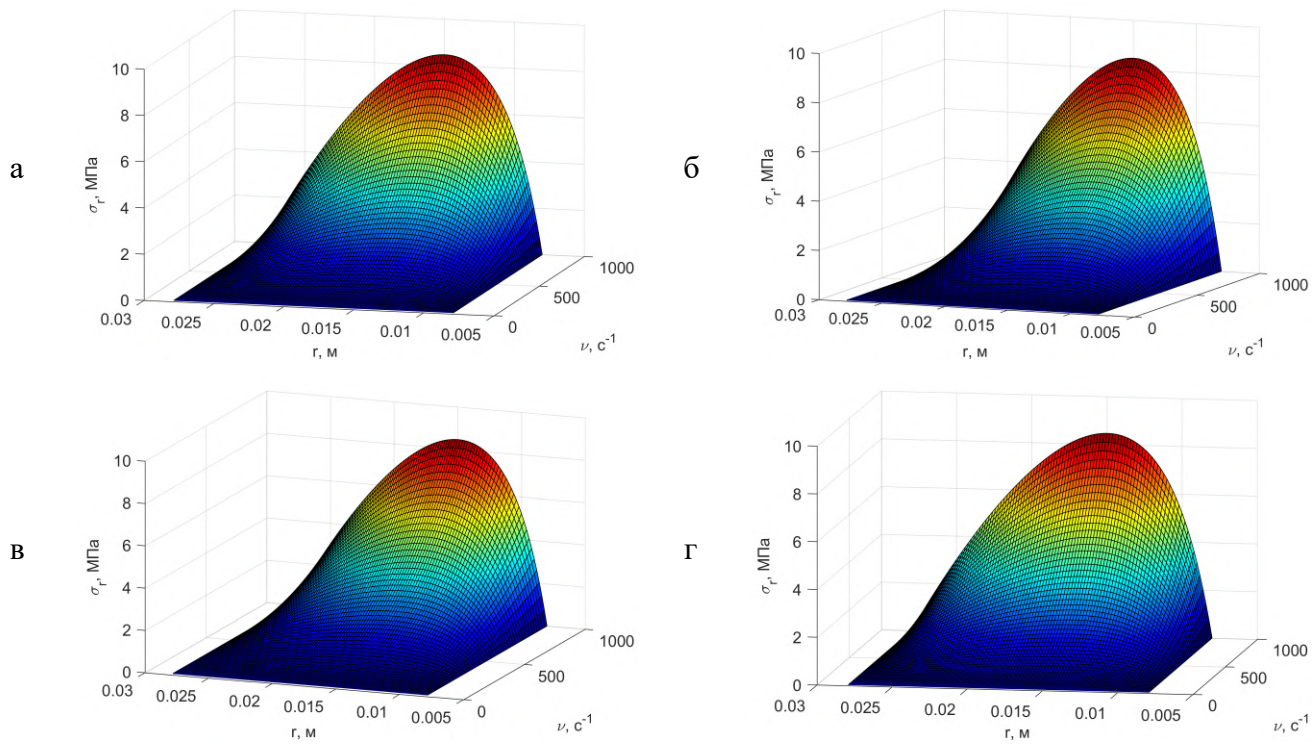


Рисунок 4.2 — Задача 1. Распределение радиальных напряжений σ_r в толще цилиндра при изменении частоты вращения

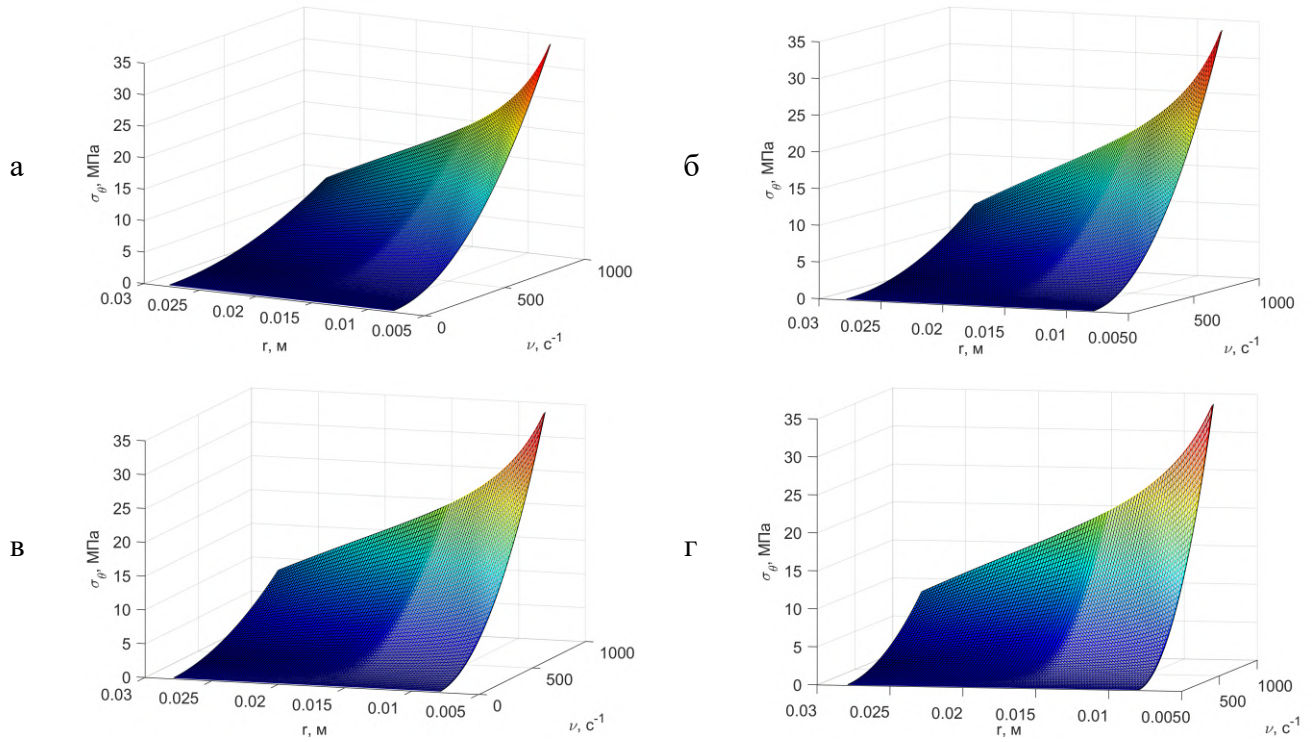


Рисунок 4.3 — Задача 1. Распределение окружных напряжений σ_θ в толще цилиндра при изменении частоты вращения

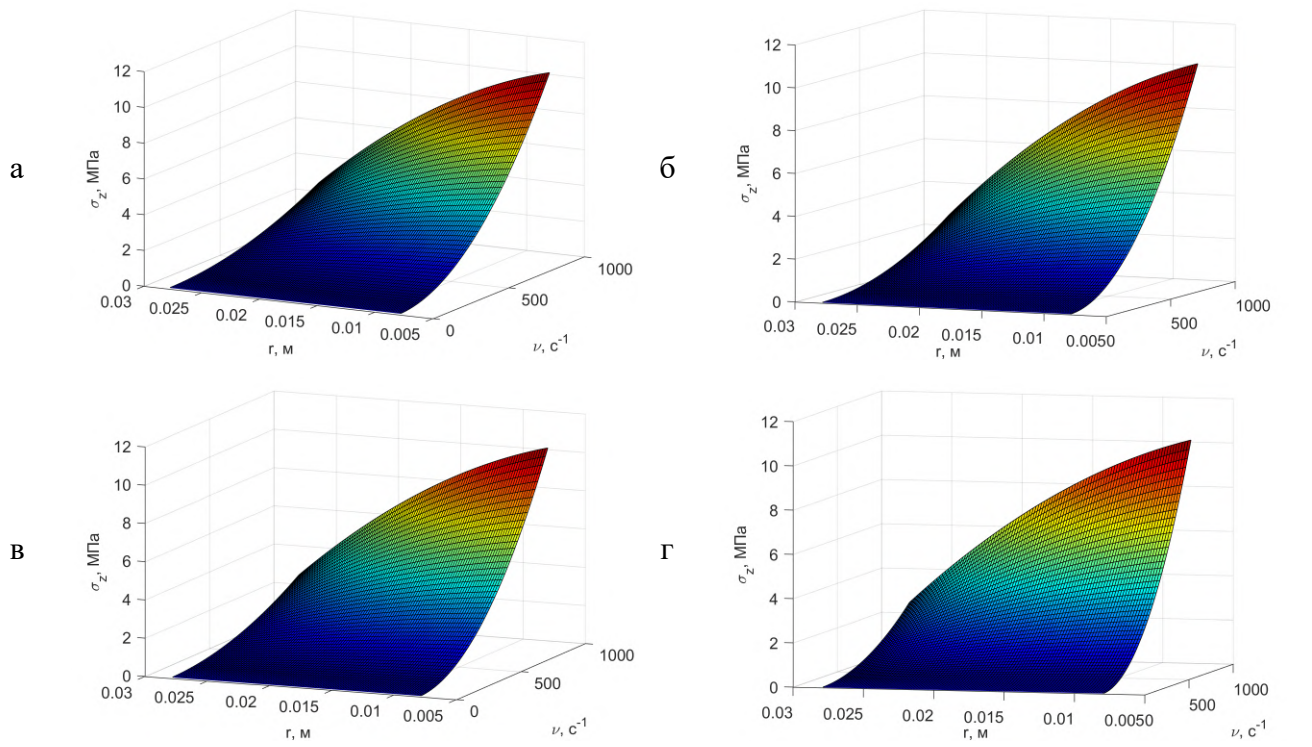


Рисунок 4.4 — Задача 1. Распределение осевых напряжений σ_z в толще цилиндра при изменении частоты вращения

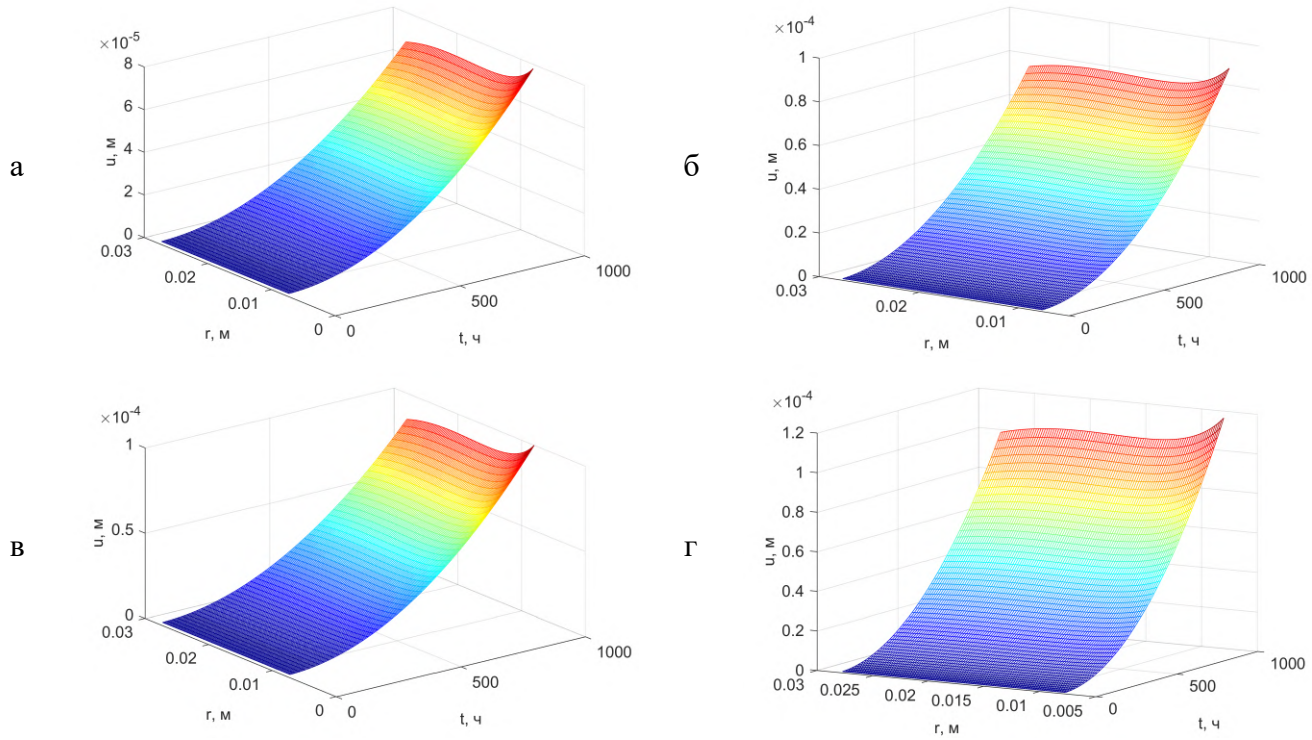


Рисунок 4.5 — Задача 1. Распределение перемещений *u* в толще цилиндра при изменении частоты вращения

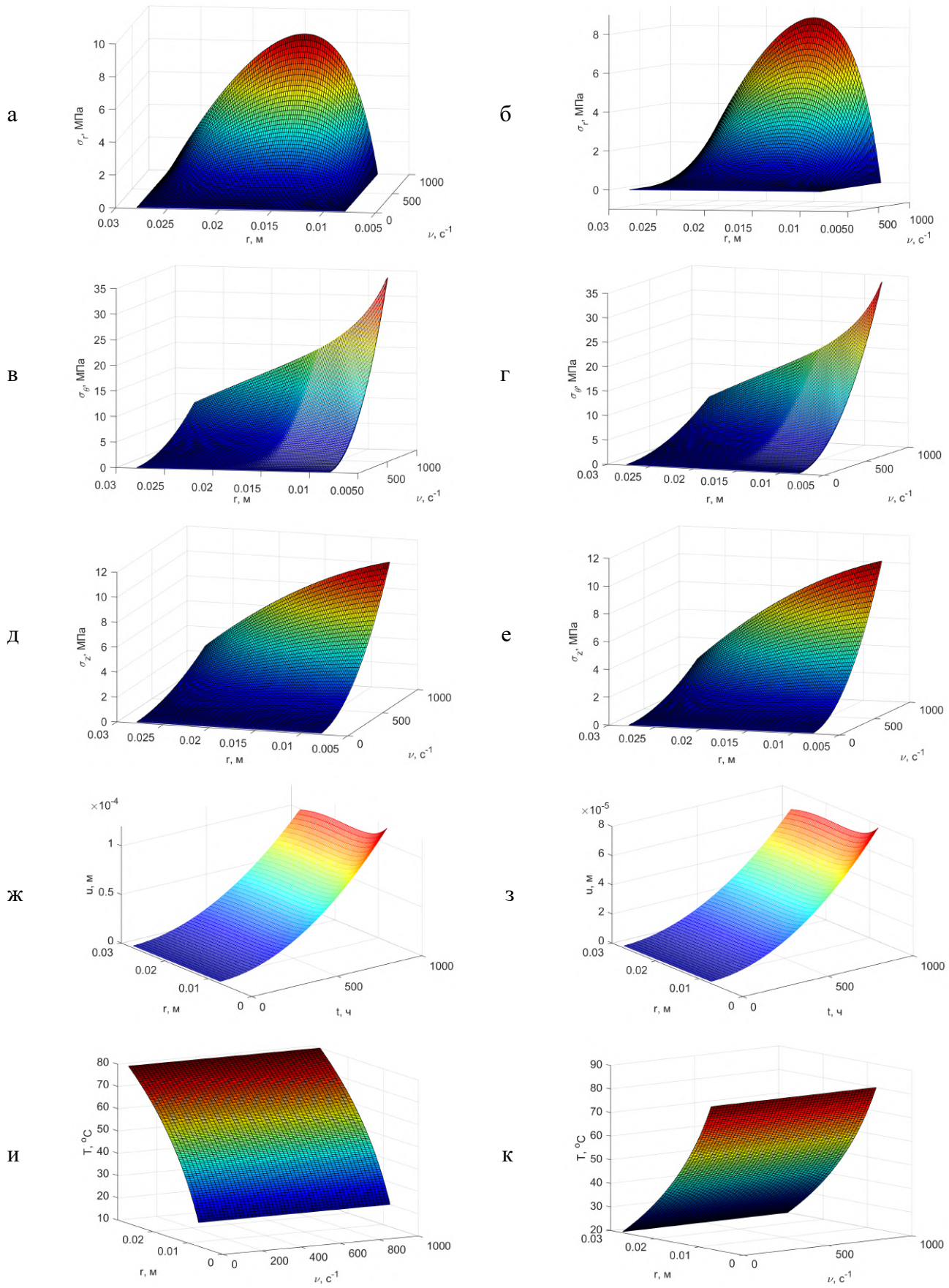


Рисунок 4.6 — Задача 2. Результаты расчёта

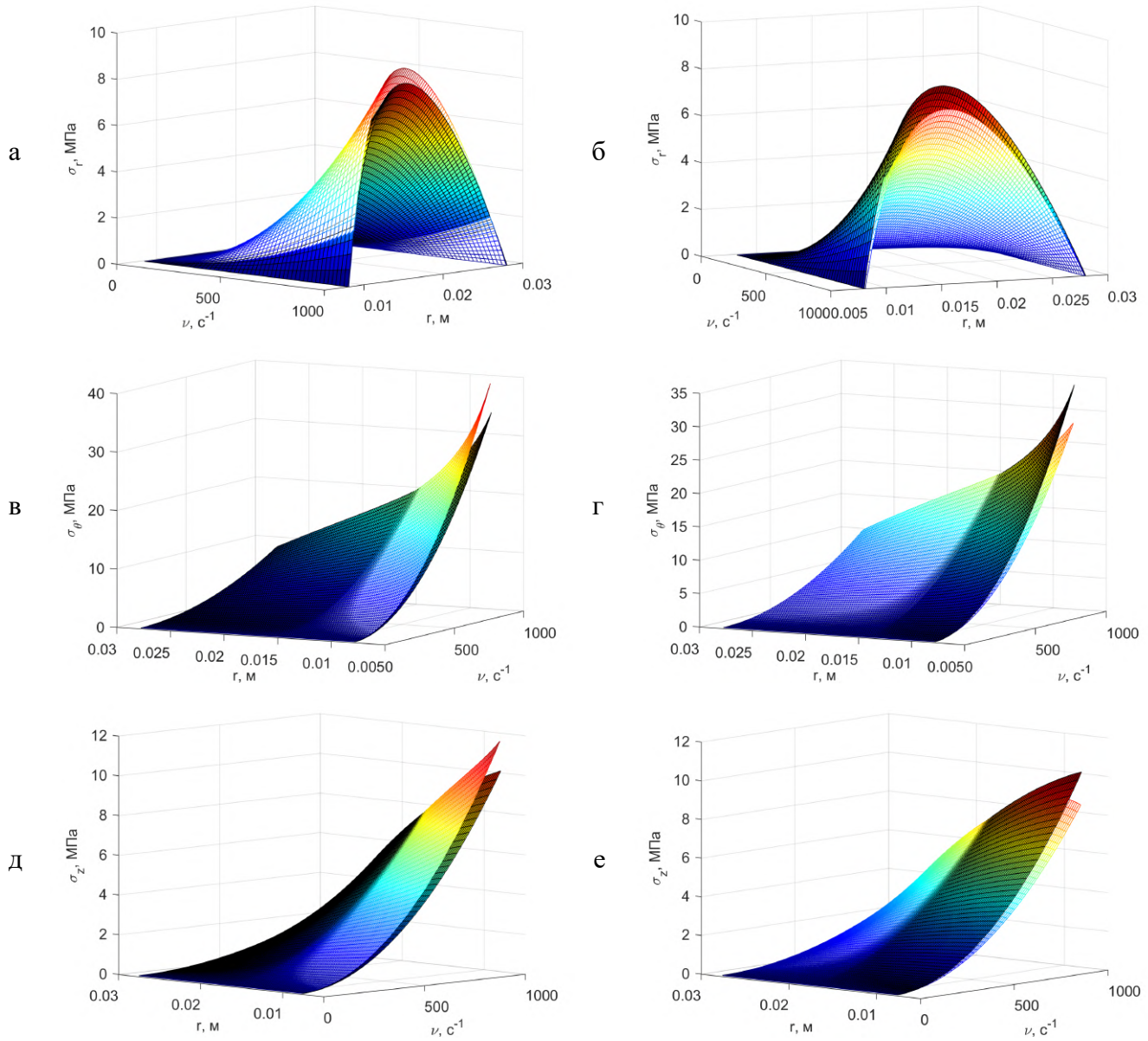


Рисунок 4.7 — Задача 3. Результаты расчёта

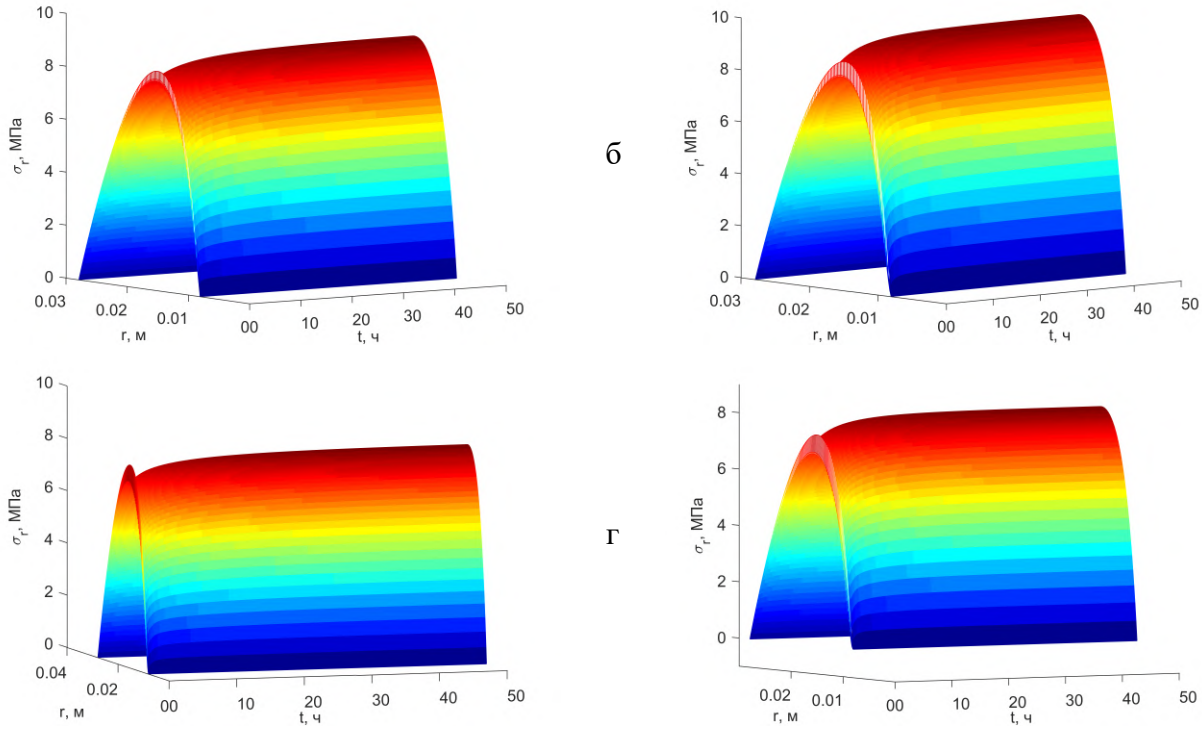


Рисунок 4.8 — Задача 4. График распределения радиальных напряжений σ_r

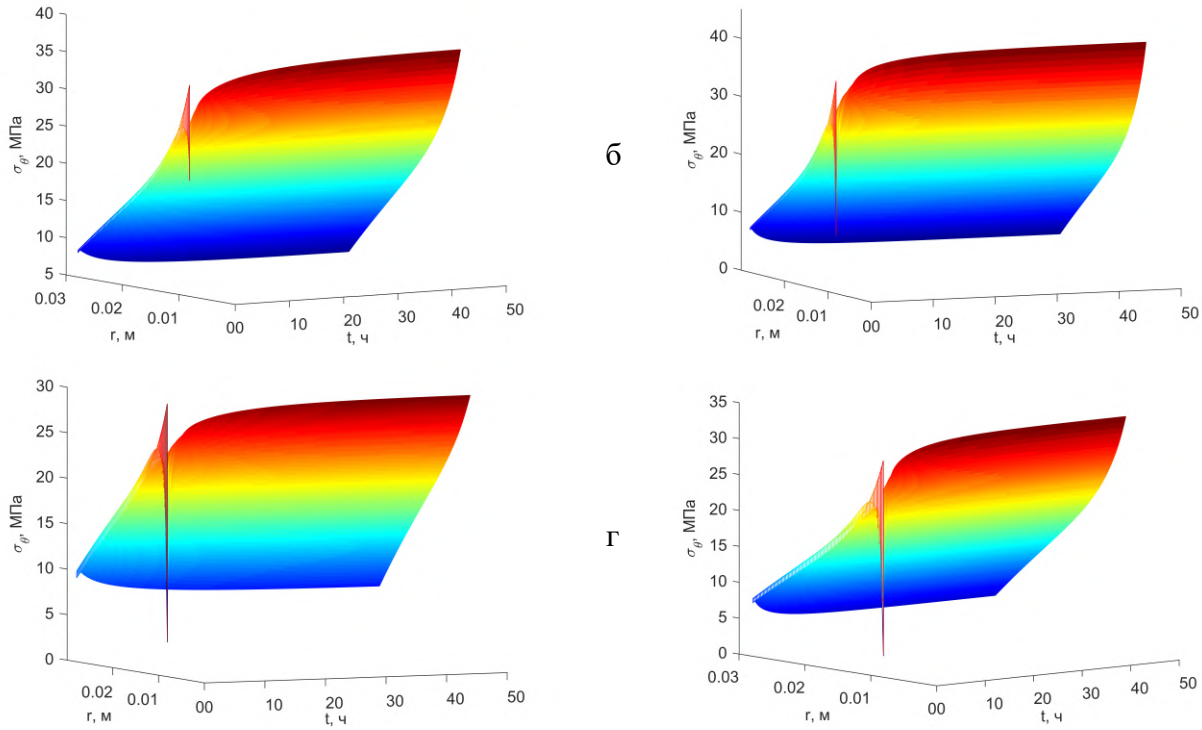


Рисунок 4.9 — Задача 4. График распределения окружных напряжений σ_θ

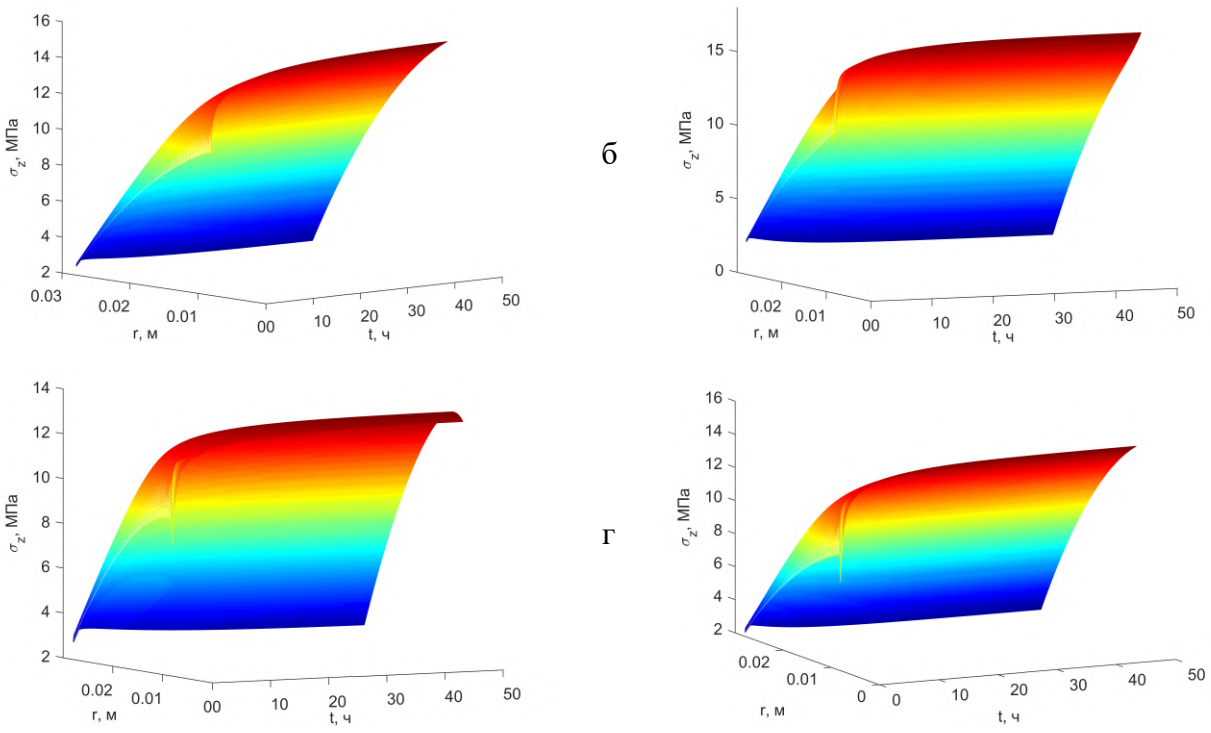


Рисунок 4.10 — Задача 4. График распределения осевых напряжений σ_z

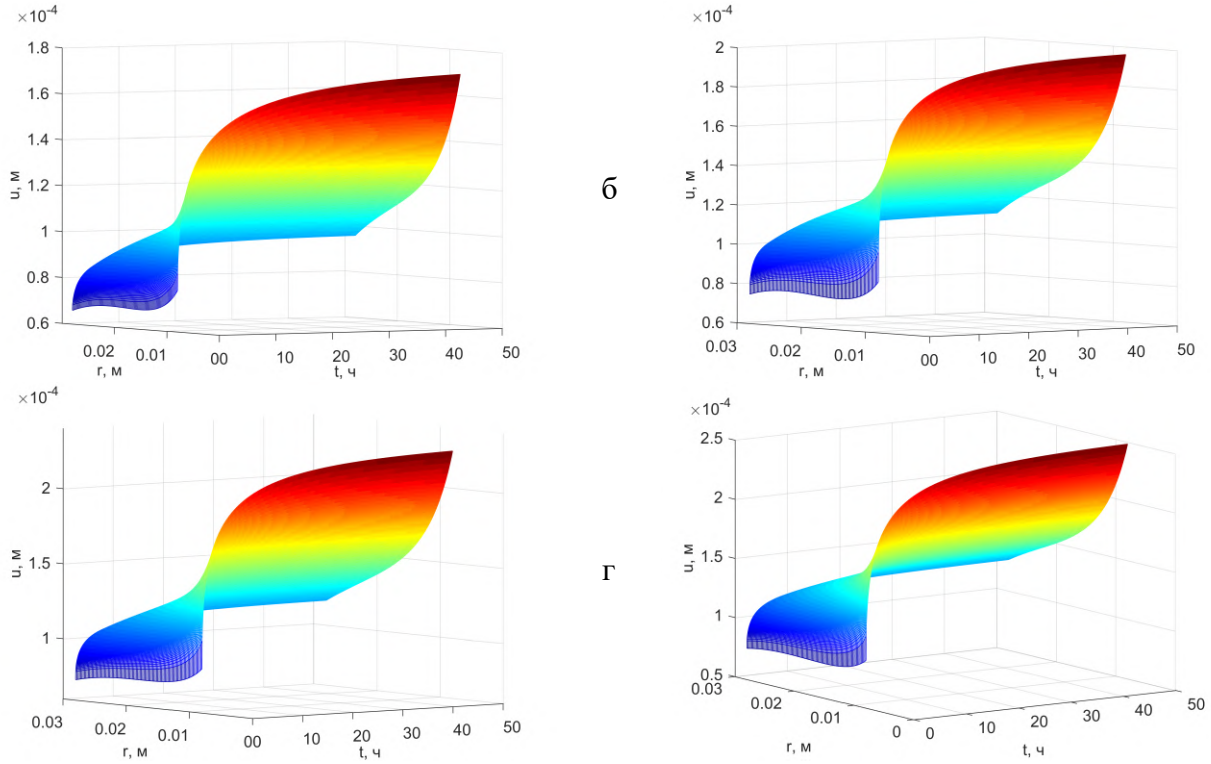


Рисунок 4.11 — Задача 4. График распределения перемещений *u*

а б

в г

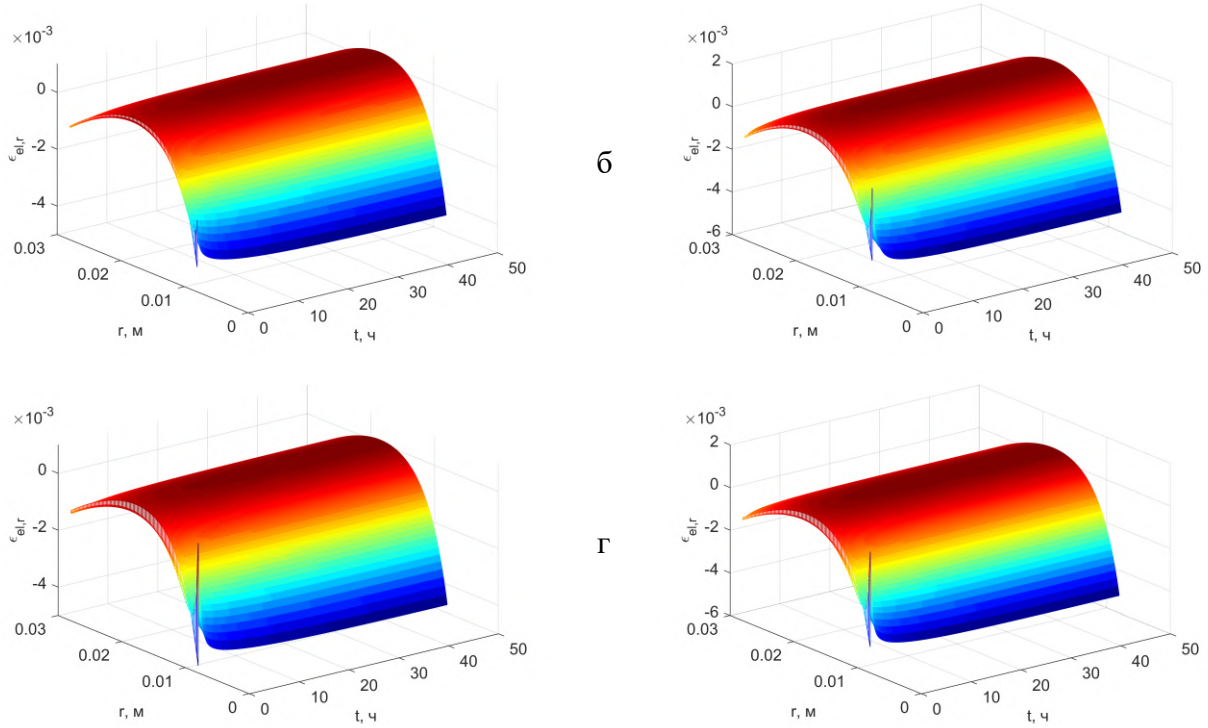


Рисунок 4.12 — Задача 4. График распределения упругих радиальных деформаций $\varepsilon_{el,r}$

а б

в г

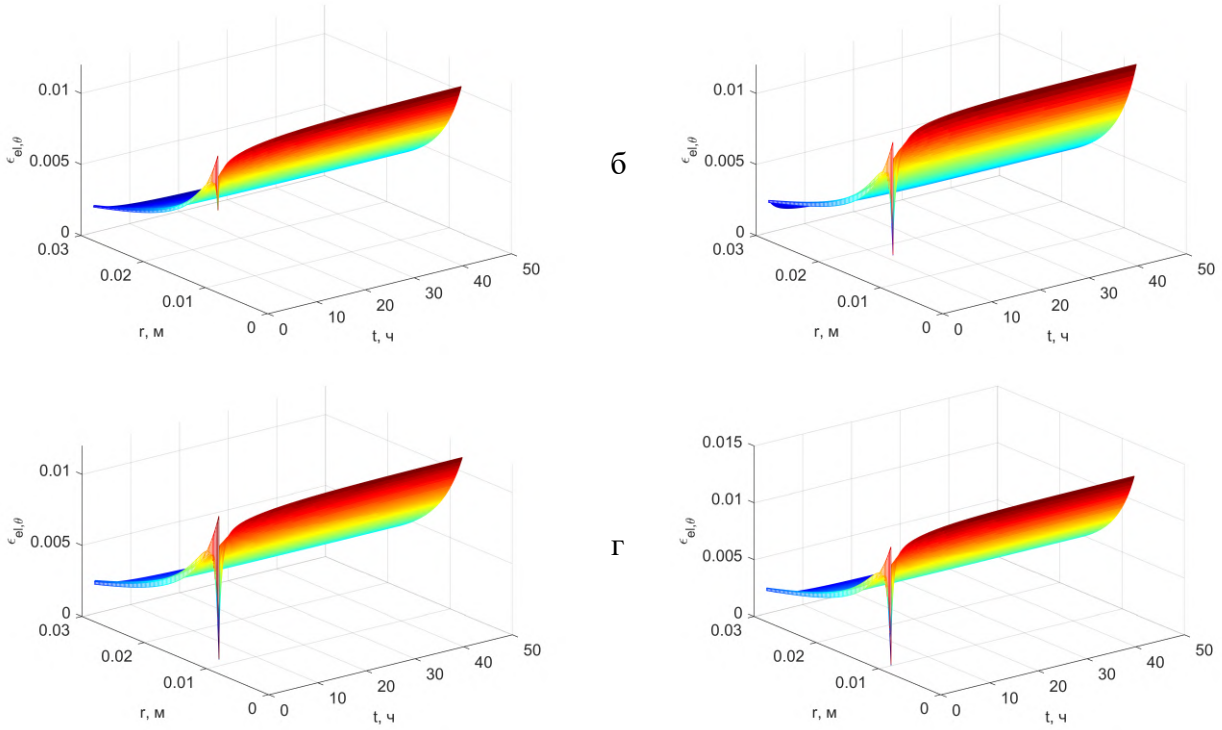


Рисунок 4.13 — Задача 4. График распределения упругих окружных деформаций $\varepsilon_{el,\theta}$

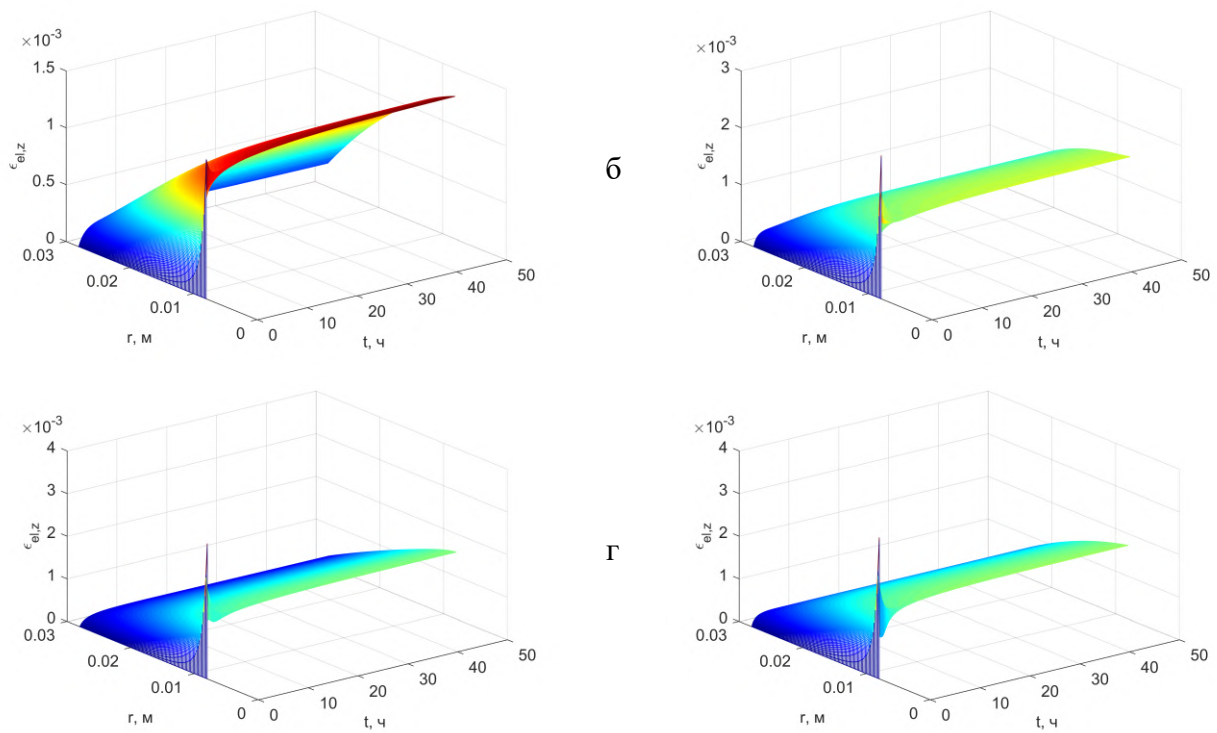


Рисунок 4.14 — Задача 4. График распределения упругих осевых деформаций $\varepsilon_{el,z}$

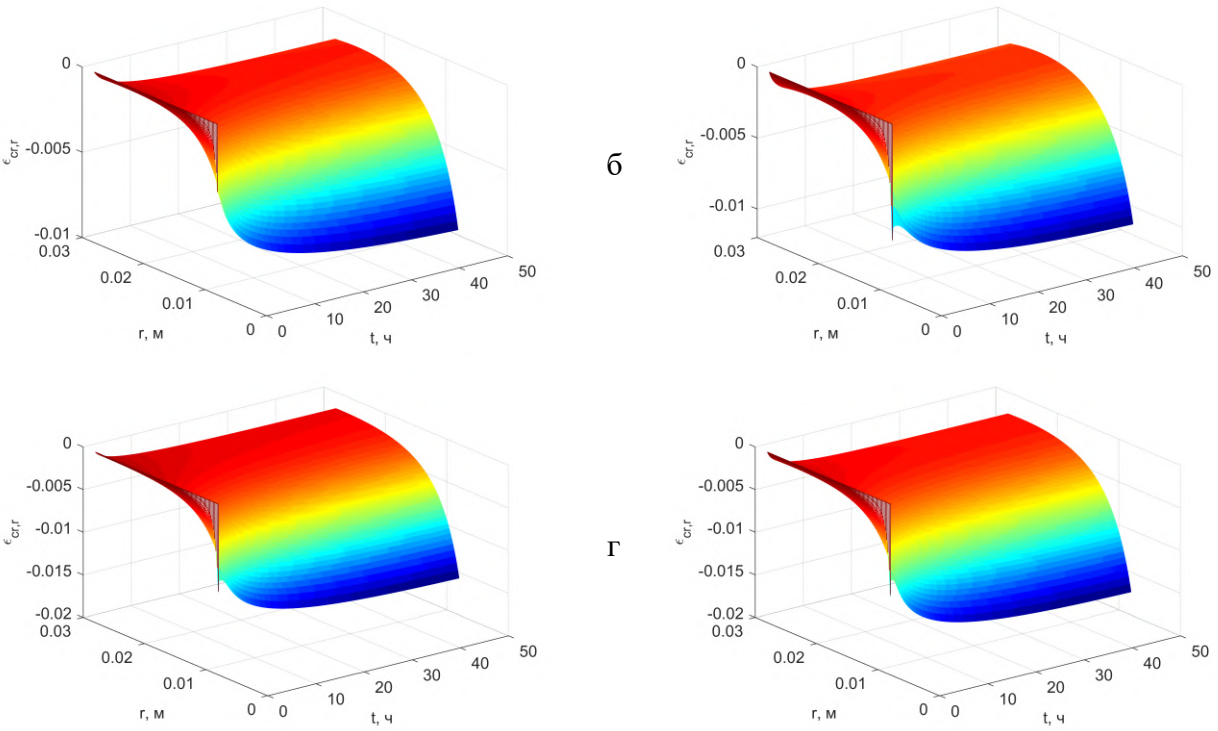


Рисунок 4.15 — Задача 4. График распределения радиальных высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,r}$

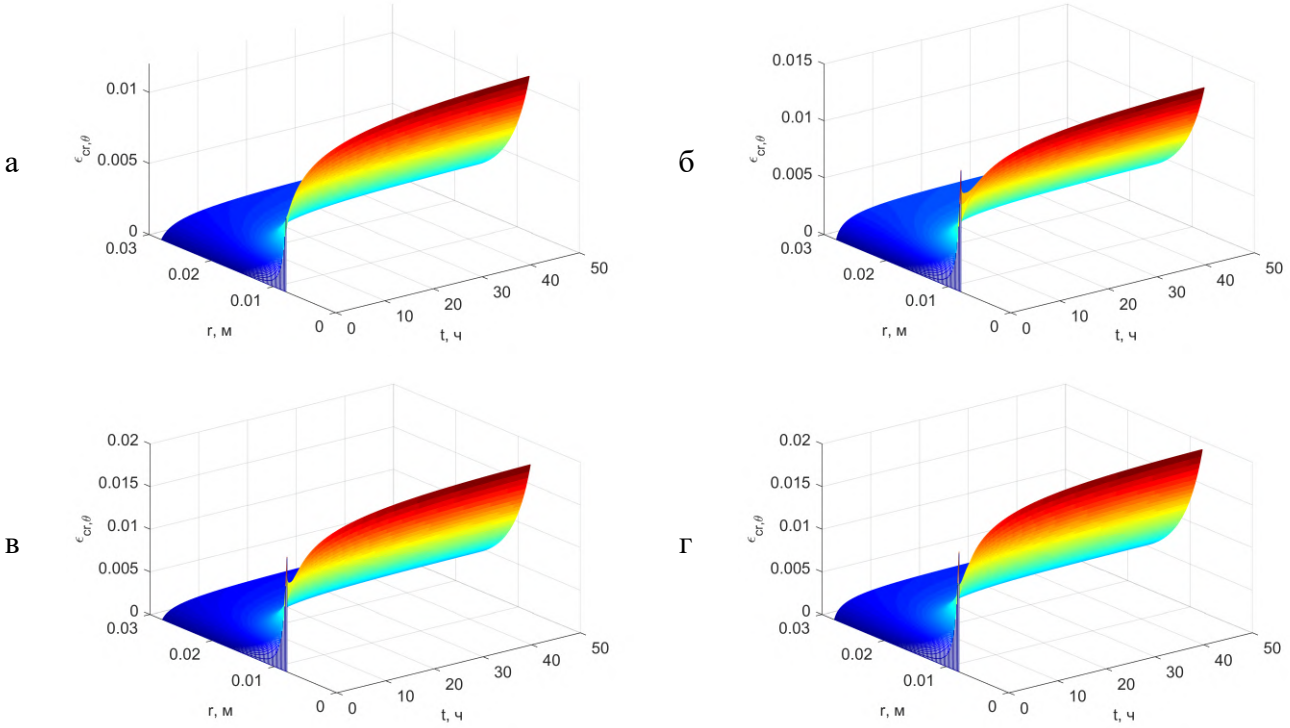


Рисунок 4.16 — Задача 4. График распределения окружных высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,\theta}$

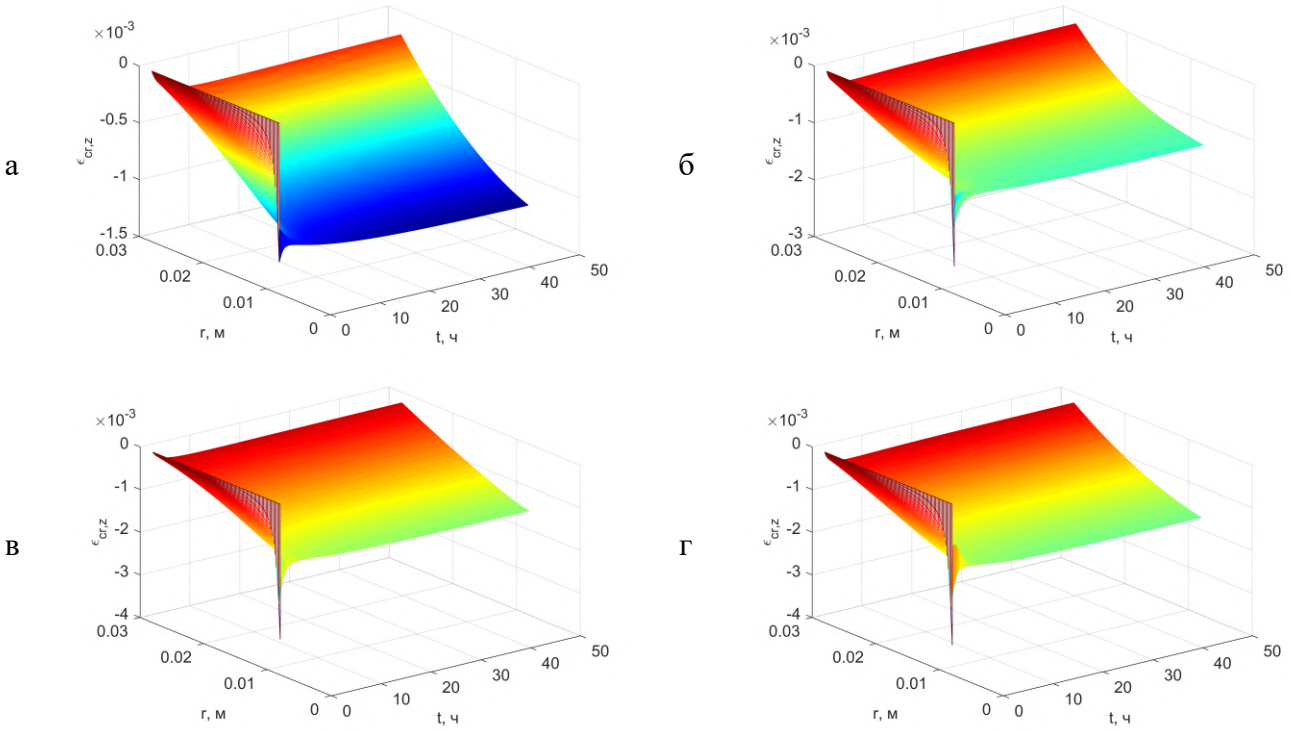


Рисунок 4.17 — Задача 4. График распределения осевых высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,\theta}$

а б

в г

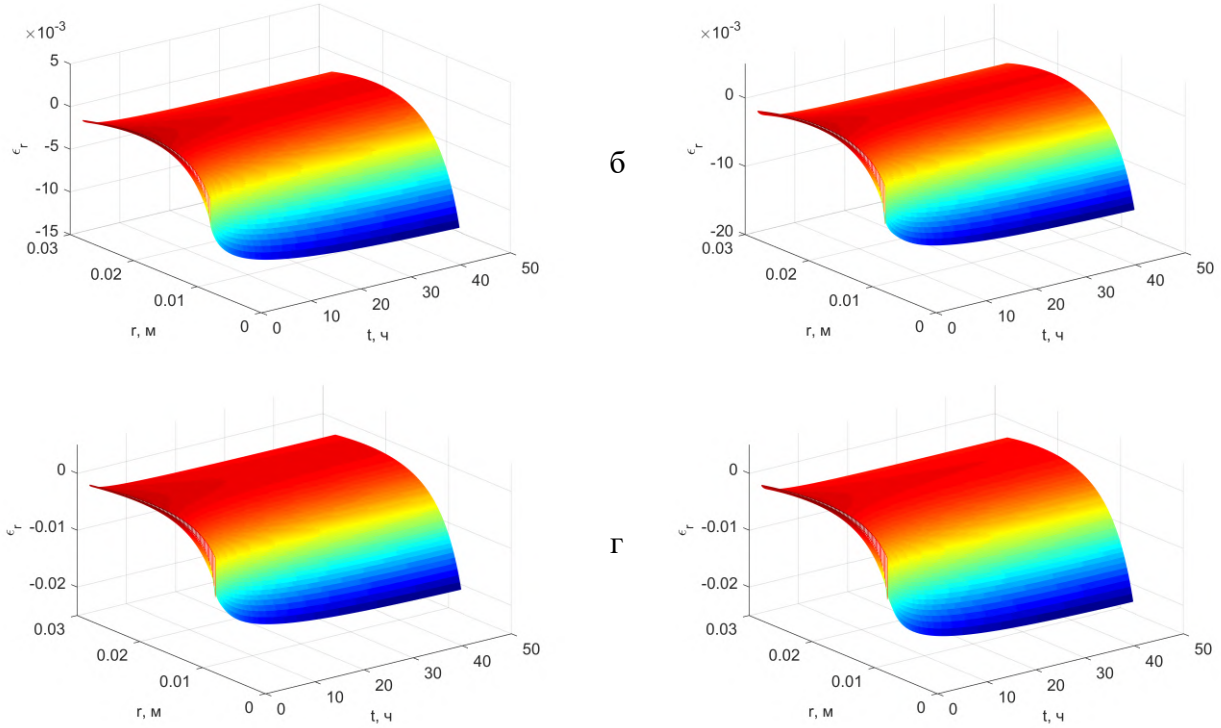


Рисунок 4.18 — Задача 4. График распределения осевых полных деформаций ε_r

а б

в г

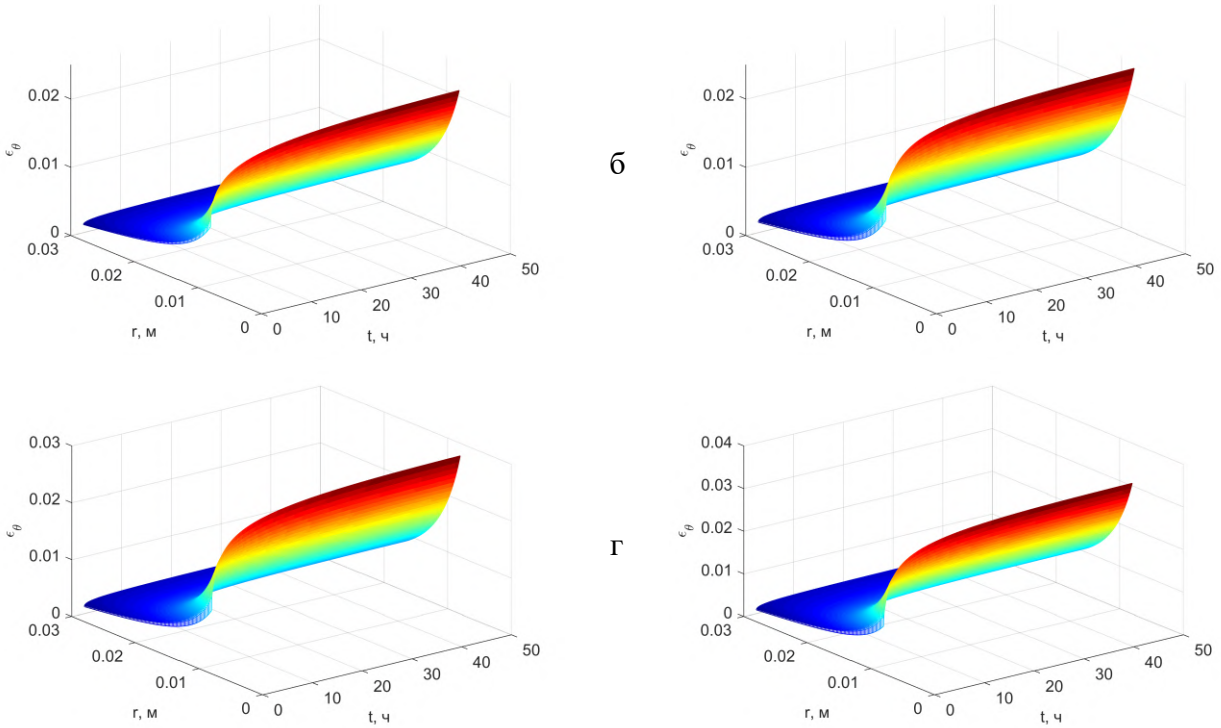


Рисунок 4.19 — Задача 4. График распределения окружных полных деформаций ε_θ

а б

в г

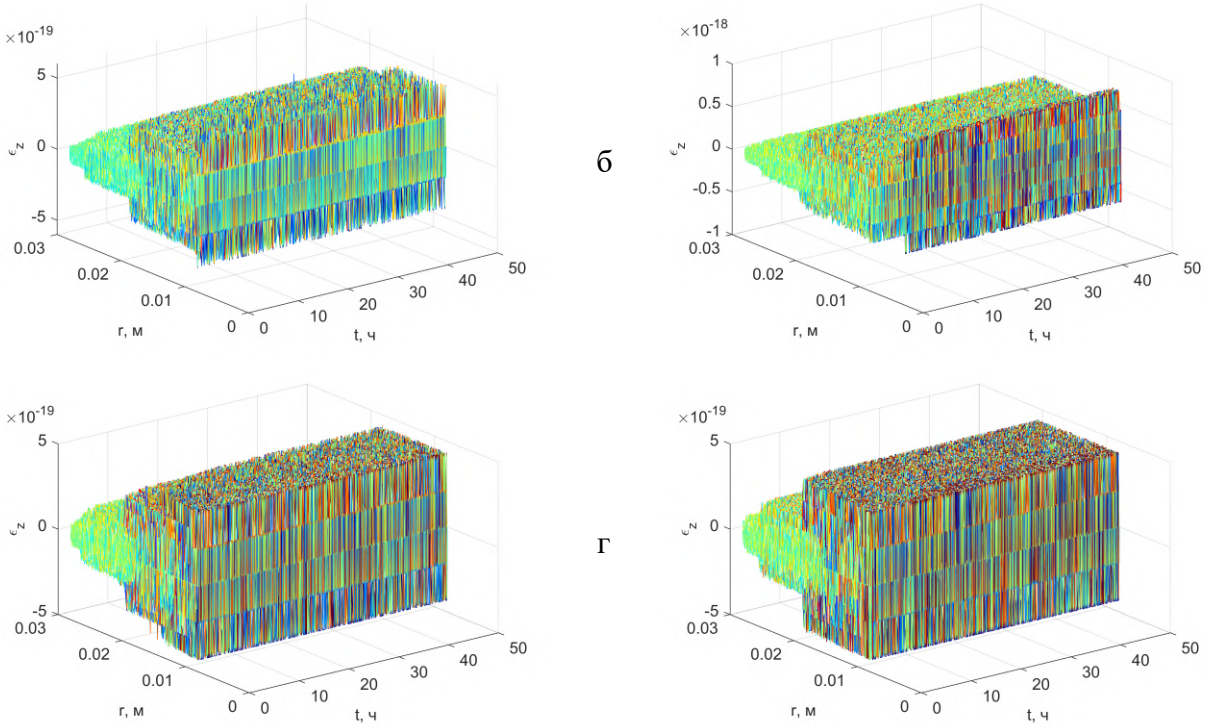


Рисунок 4.20 — Задача 4. График распределения осевых полных деформаций ε_z

а б

в г

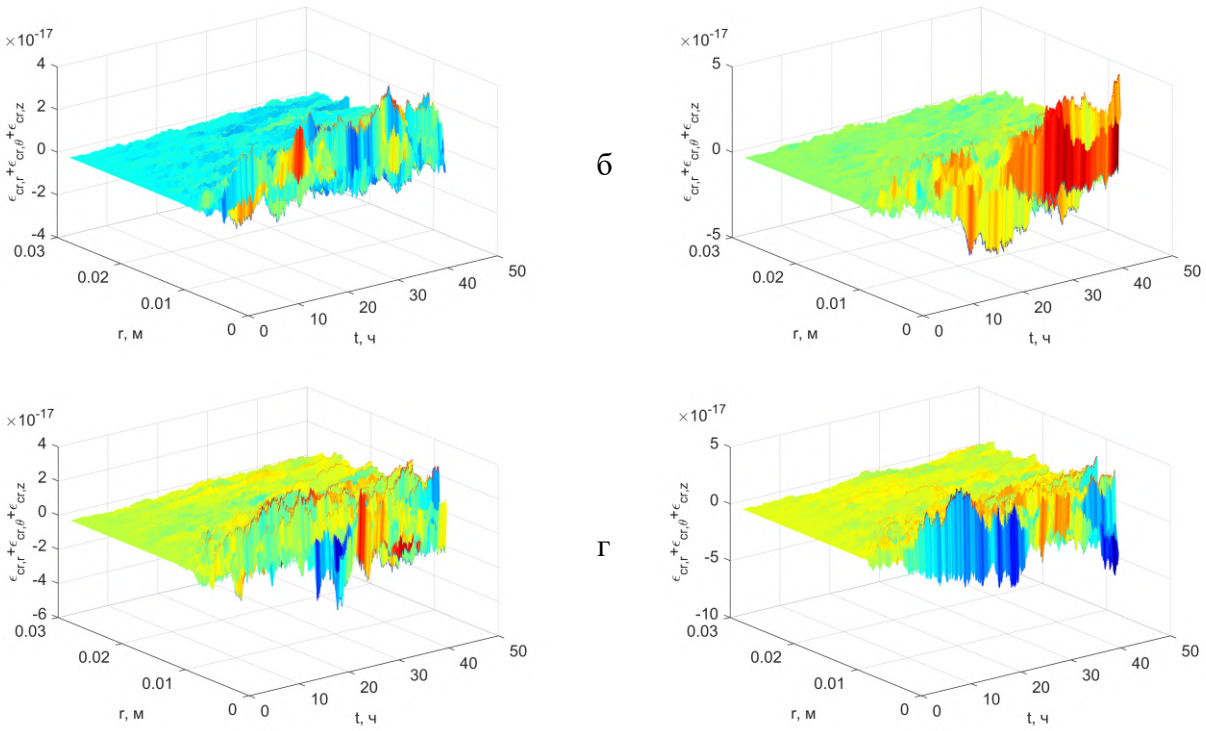


Рисунок 4.21 — Задача 4. График распределения суммы высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}$

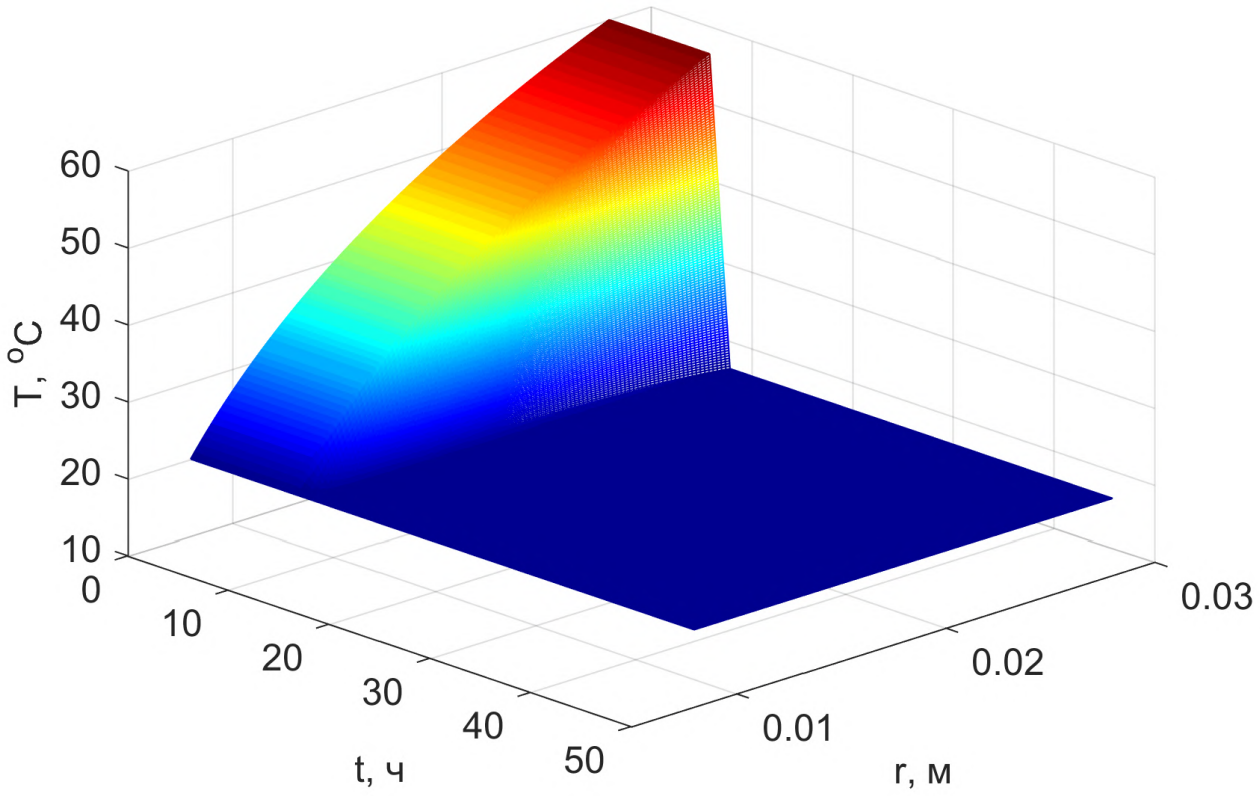


Рисунок 4.22 — Задача 5. Распределение температуры в теле с течением времени

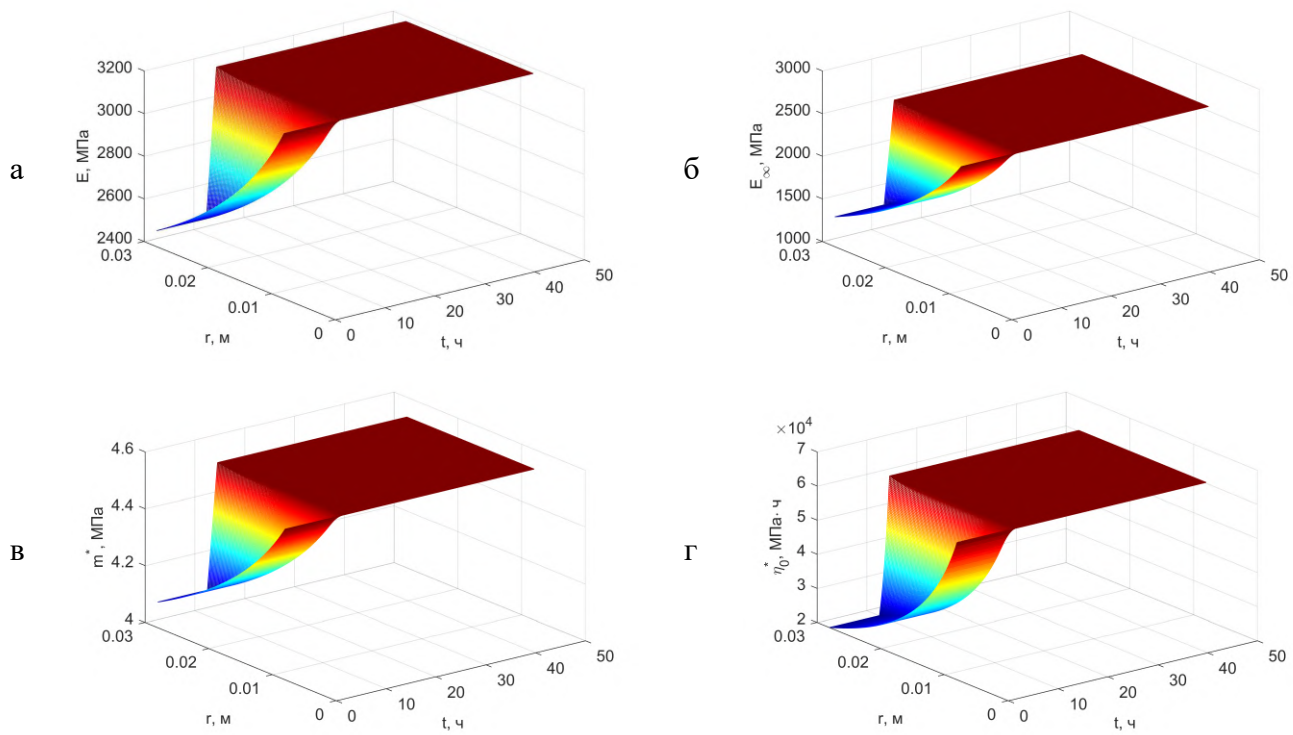
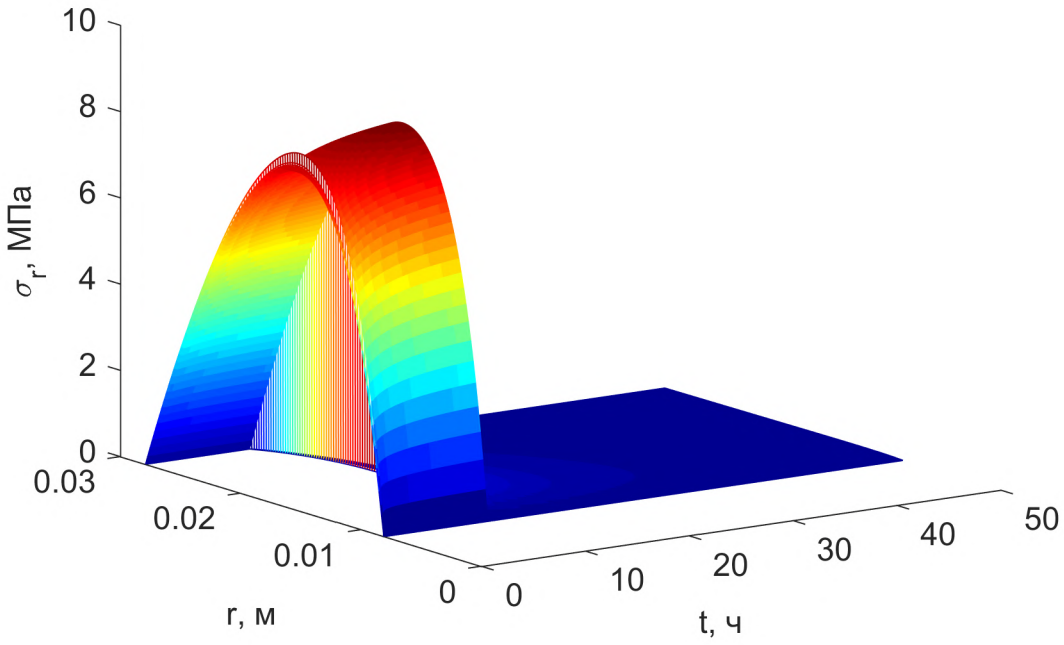


Рисунок 4.23 — Задача 5. Распределение физико-механических параметров полимера в зависимости от температуры (задача №2): а — модуль упругости; б — модуль высокоэластичности; в — модуль скорости; б — коэффициент начальной релаксационной вязкости

а



б

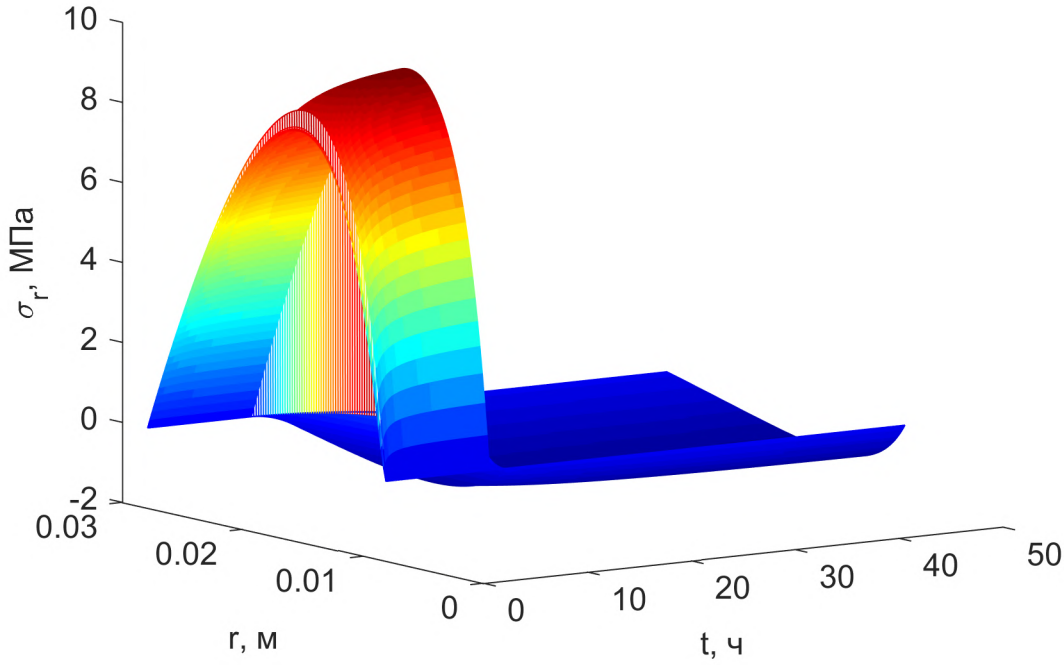
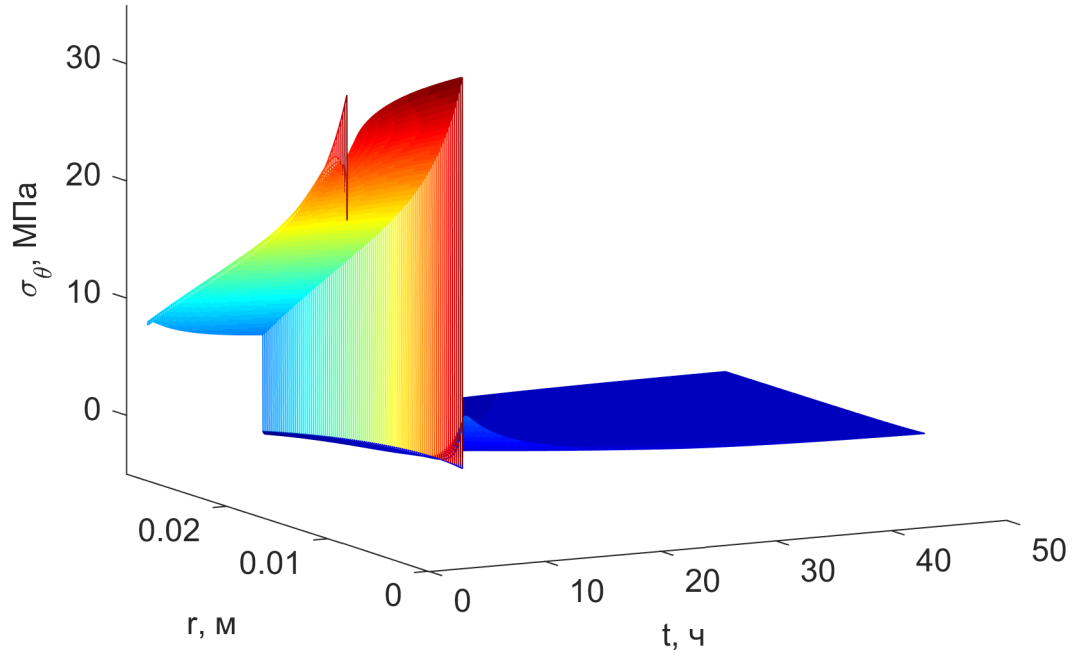


Рисунок 4.24 — Задача 5. Распределение радиальных напряжений σ_r: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

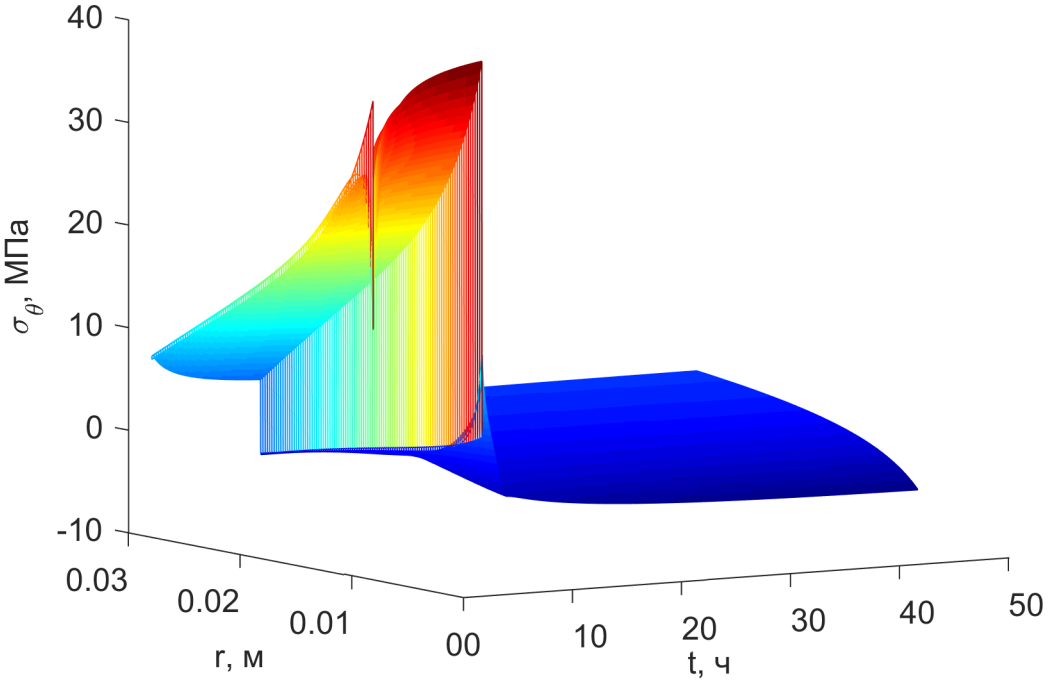
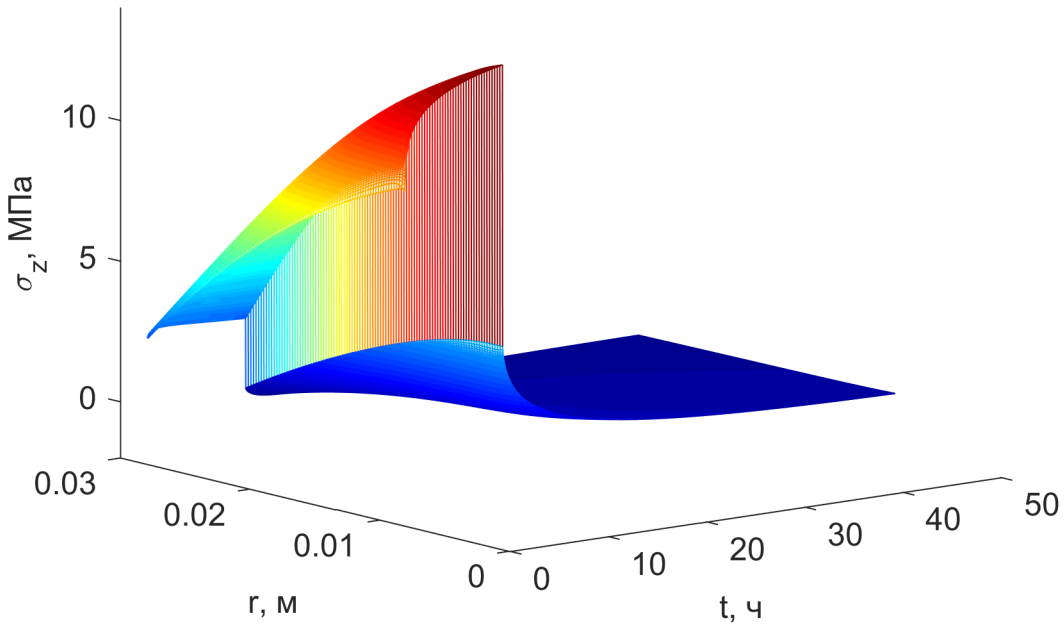


Рисунок 4.25 — Задача 5. Распределение окружных напряжений σ_θ: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

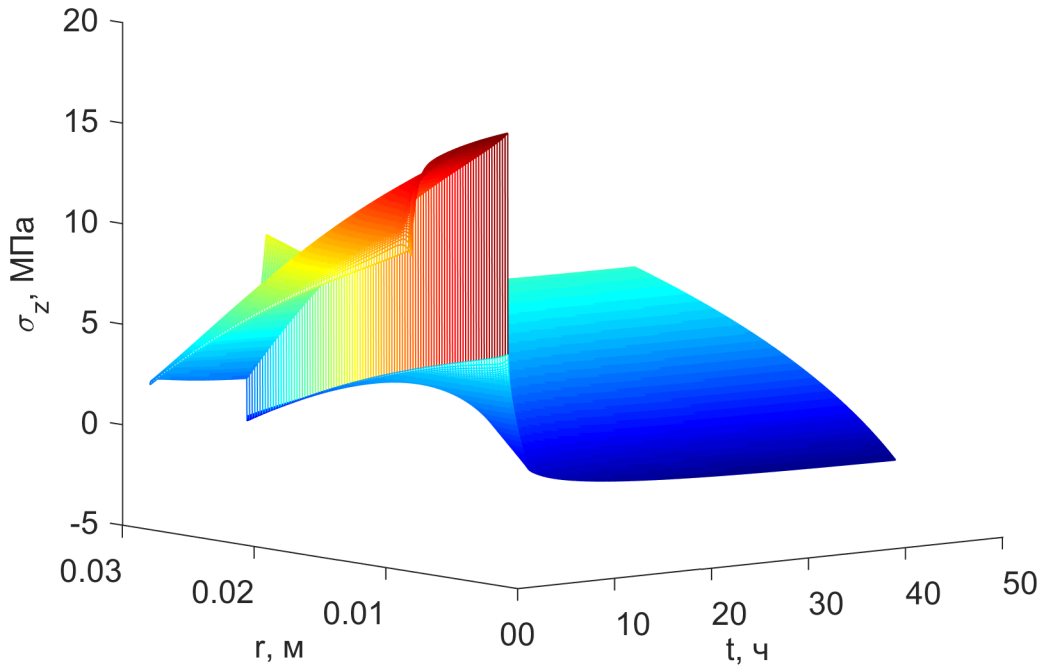
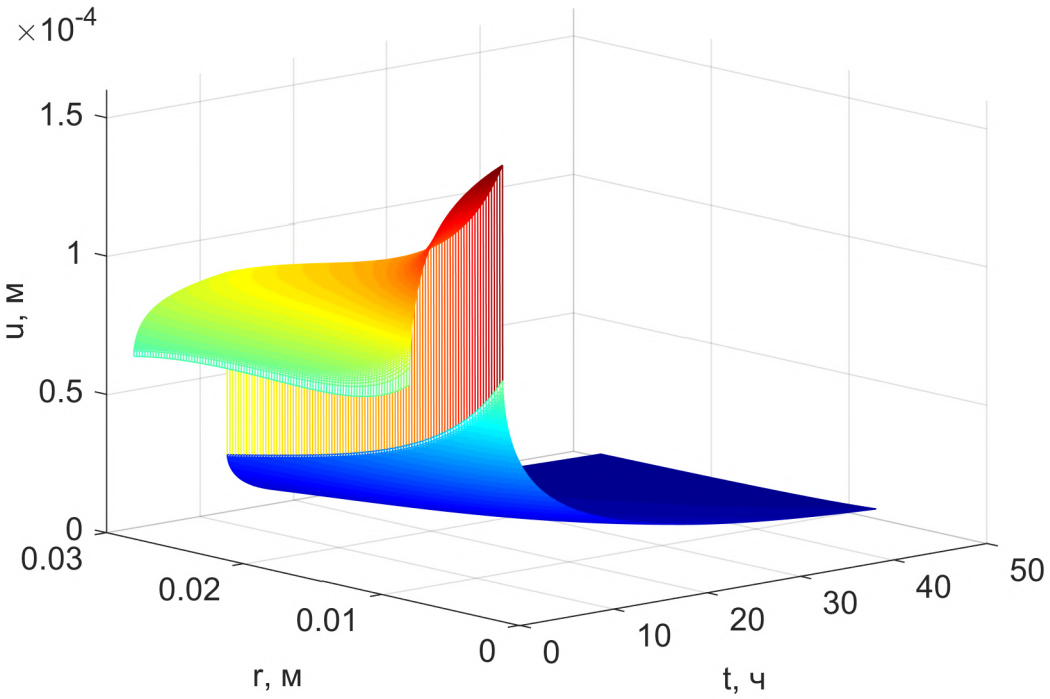


Рисунок 4.26 — Задача 5. Распределение радиальных напряжений σ_z: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

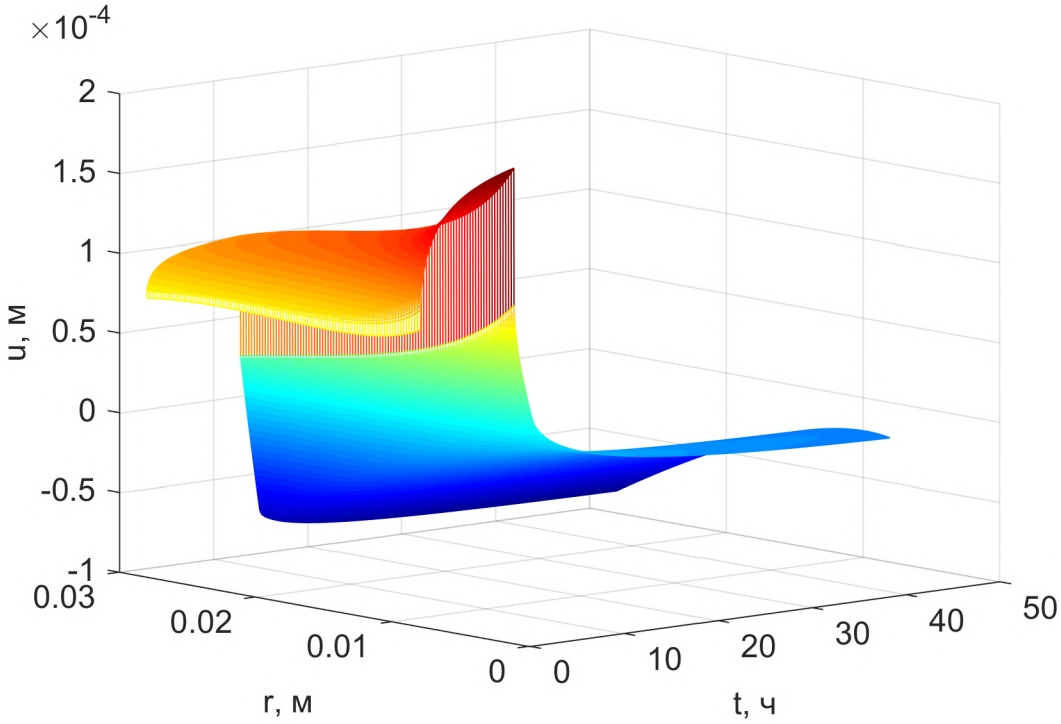
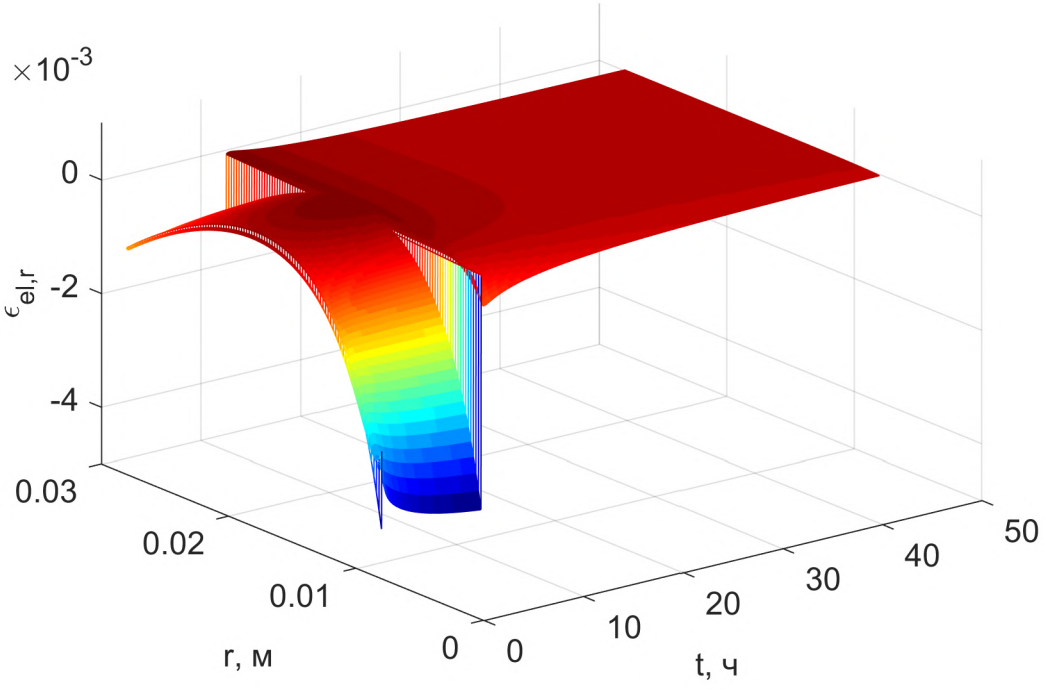


Рисунок 4.27 — Задача 5. Распределение радиальных перемещений *u*: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

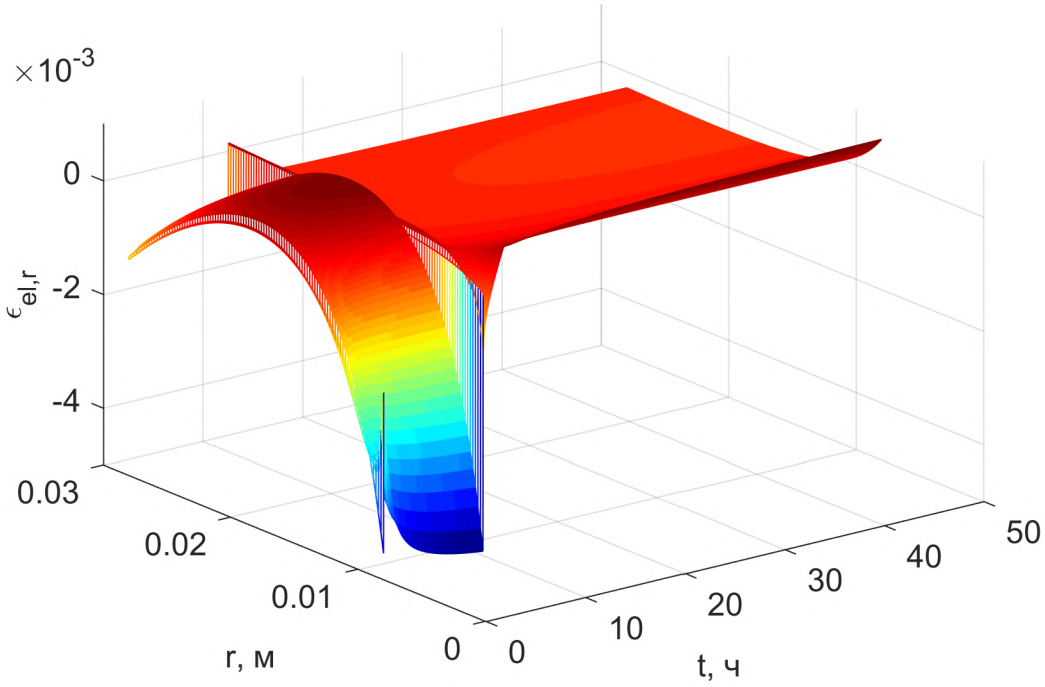
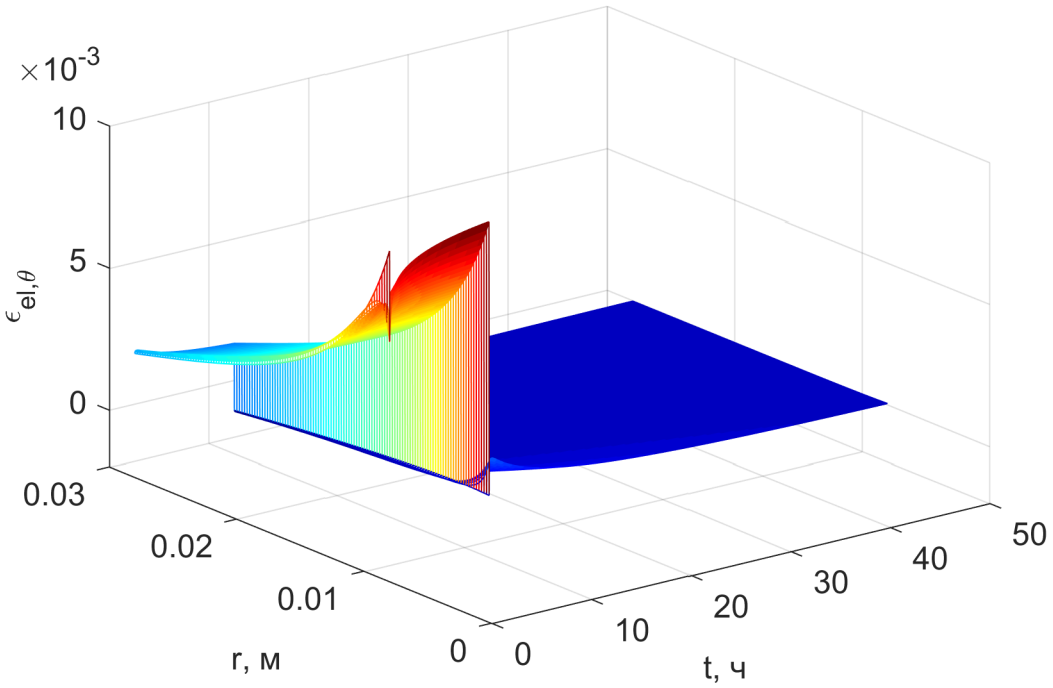


Рисунок 4.28 — Задача 5. Распределение радиальных упругих деформаций $\varepsilon_{el,r}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

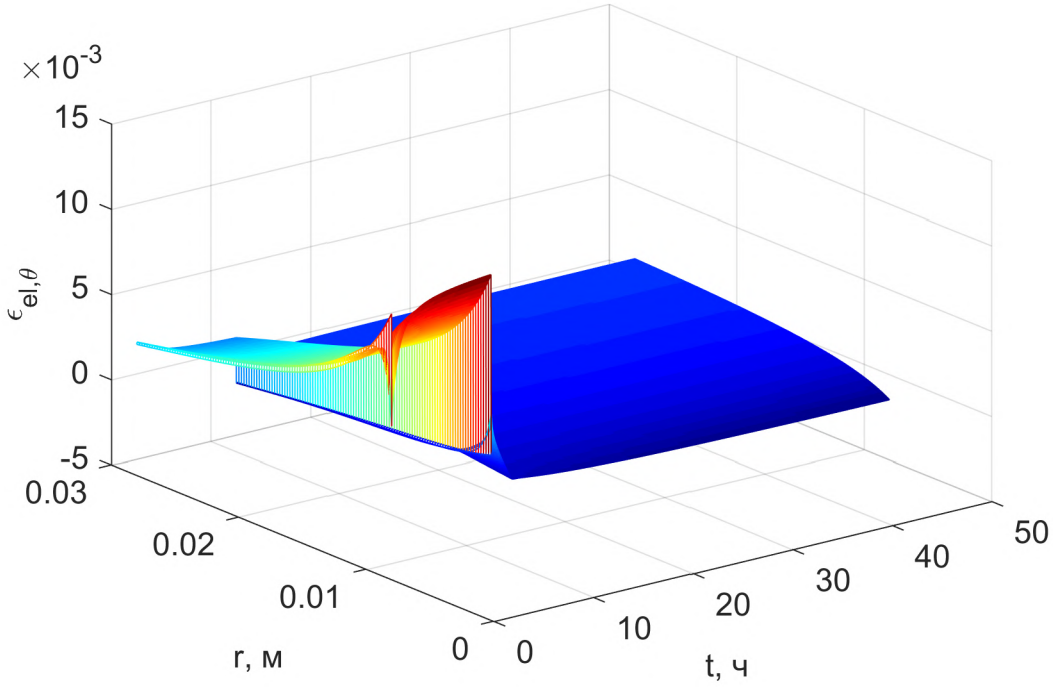
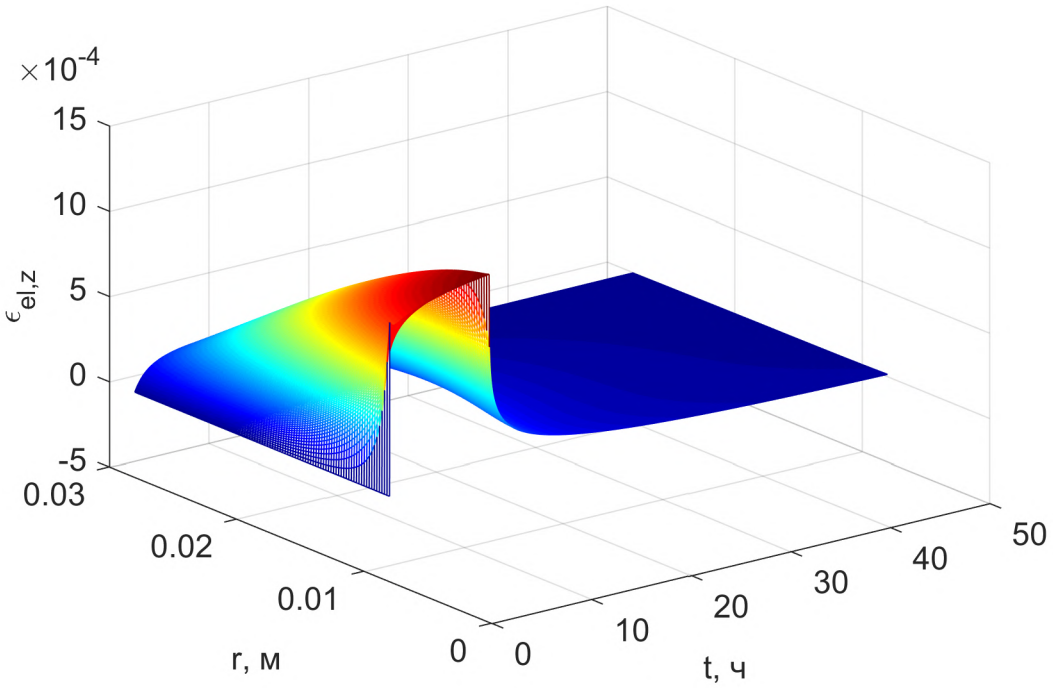


Рисунок 4.29 — Задача 5. Распределение окружных упругих деформаций $\varepsilon_{el,\theta}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

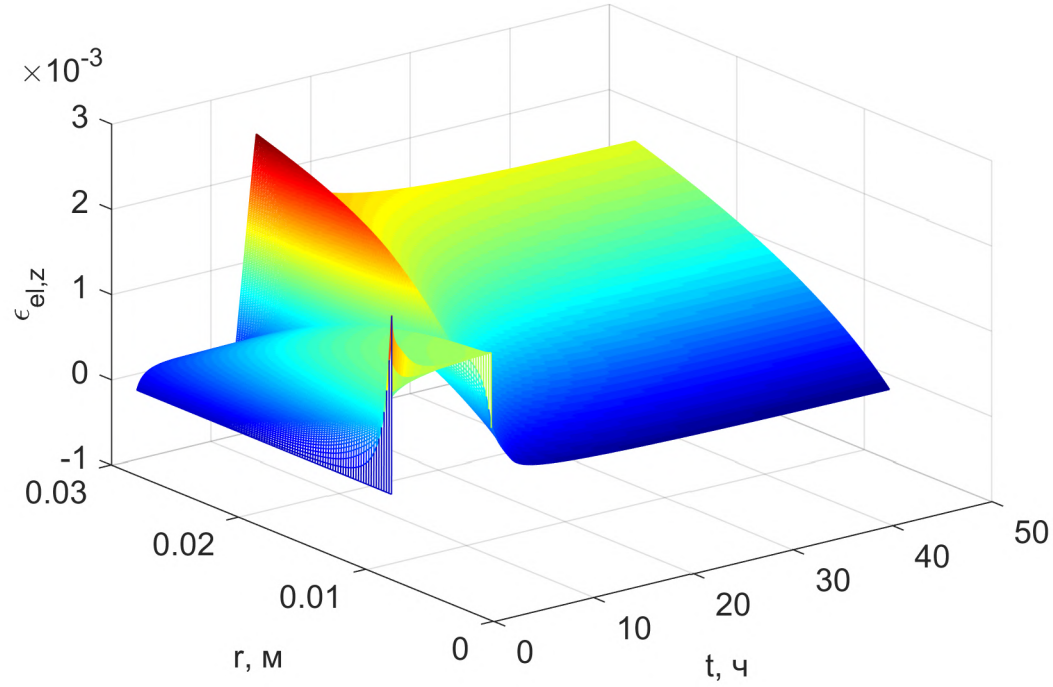
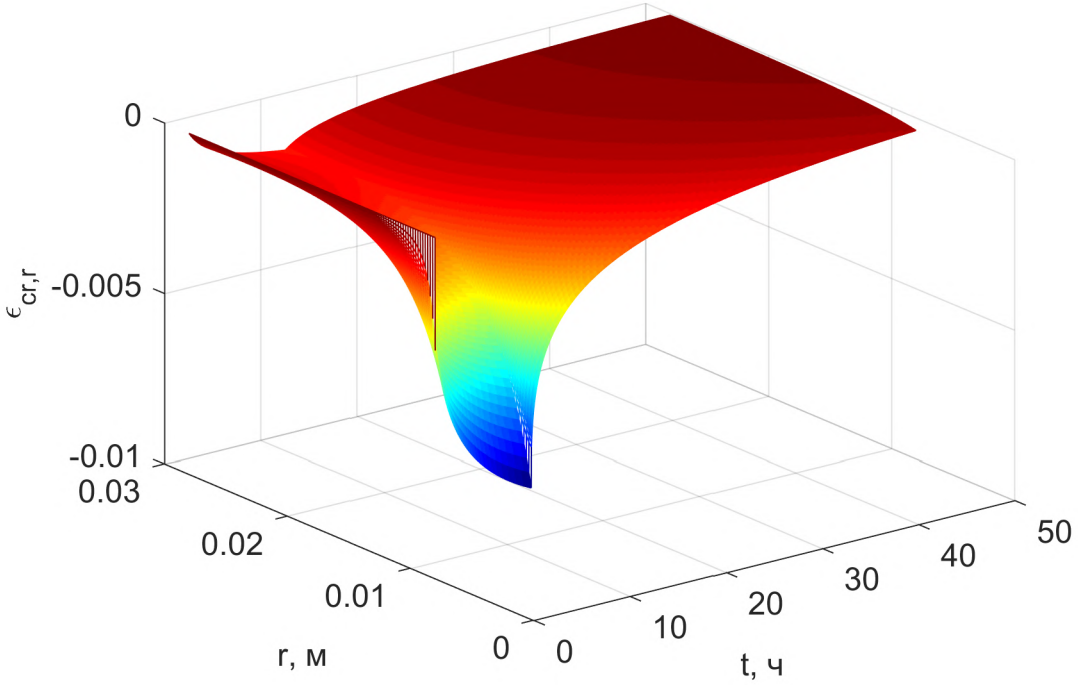


Рисунок 4.30 — Задача 5. Распределение осевых упругих деформаций $\varepsilon_{el,z}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

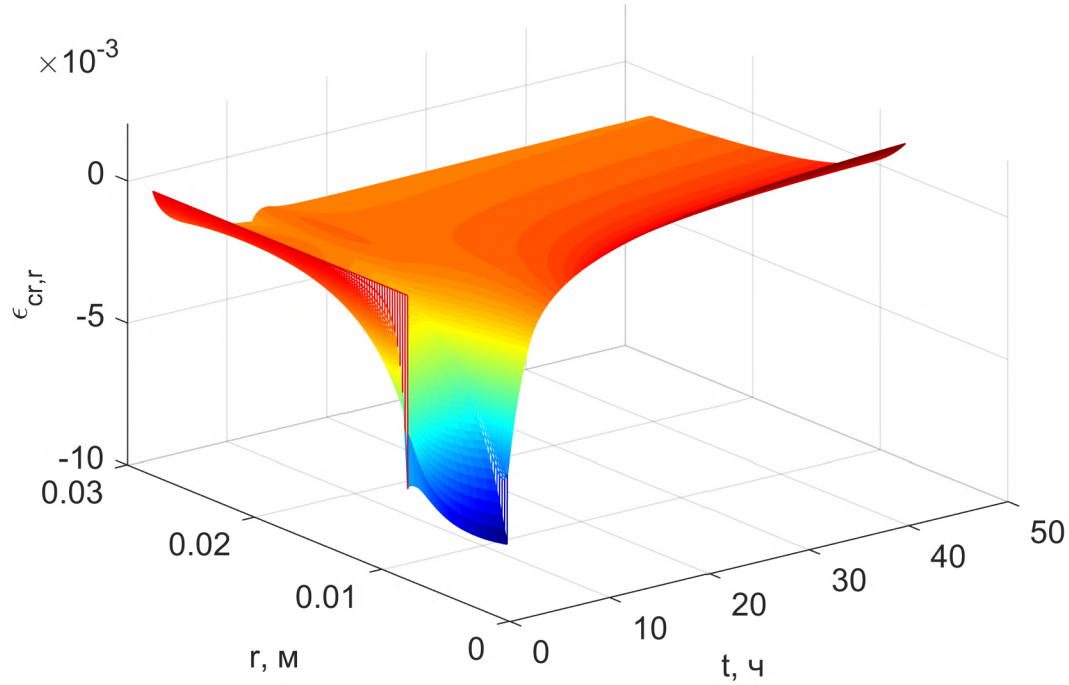
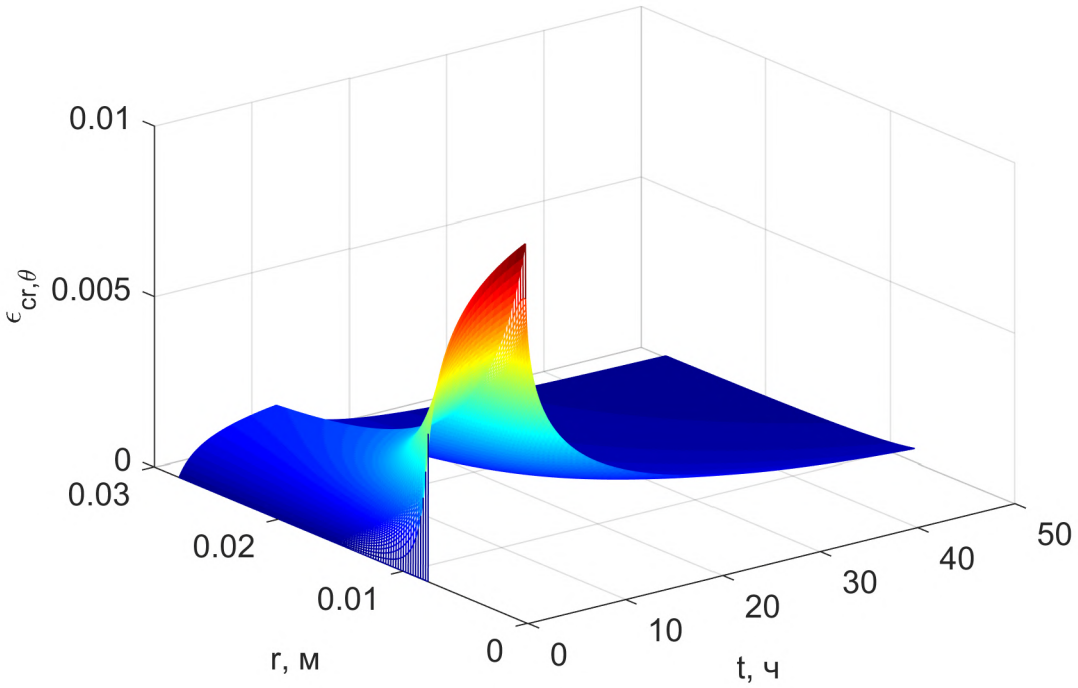


Рисунок 4.31 — Задача 5. Распределение радиальных высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,r}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

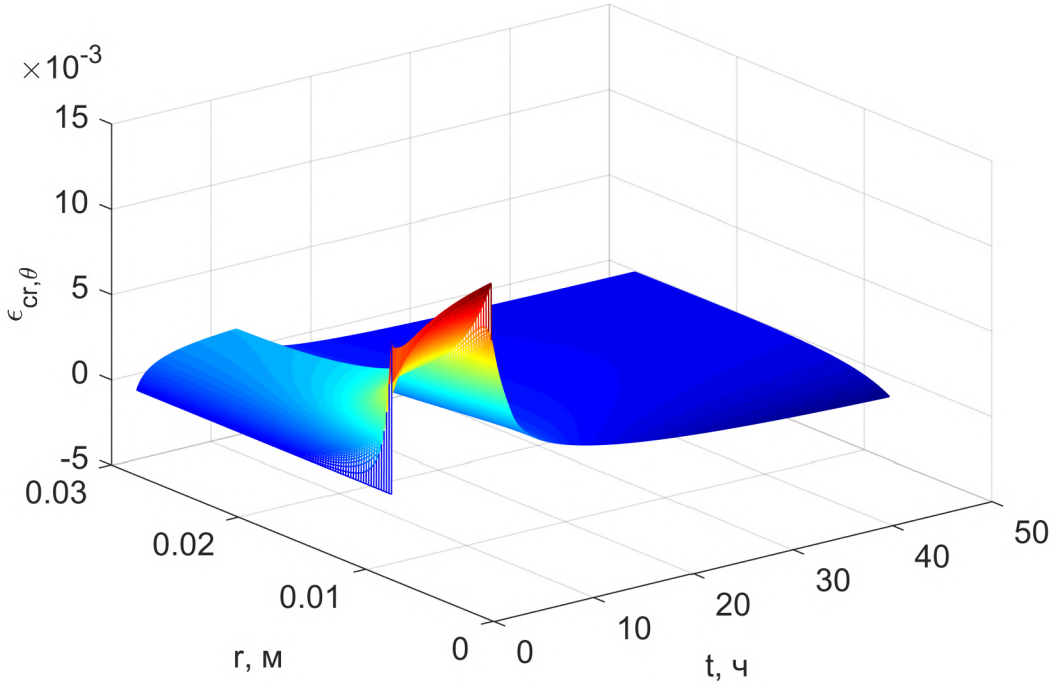
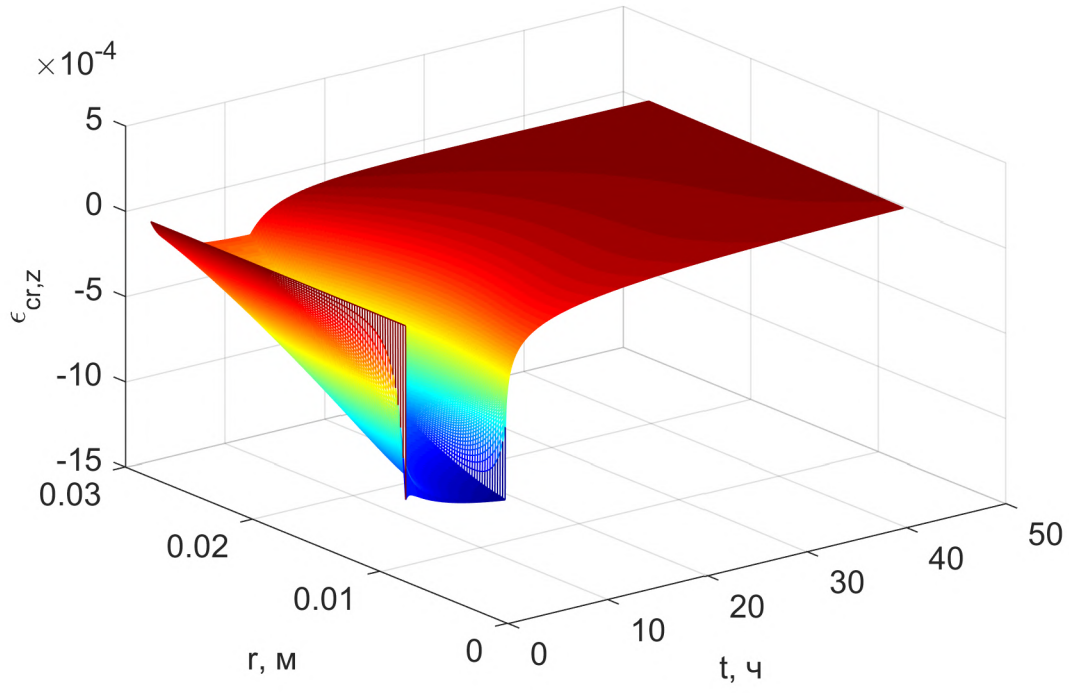


Рисунок 4.32 — Задача 5. Распределение окружных высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,\theta}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

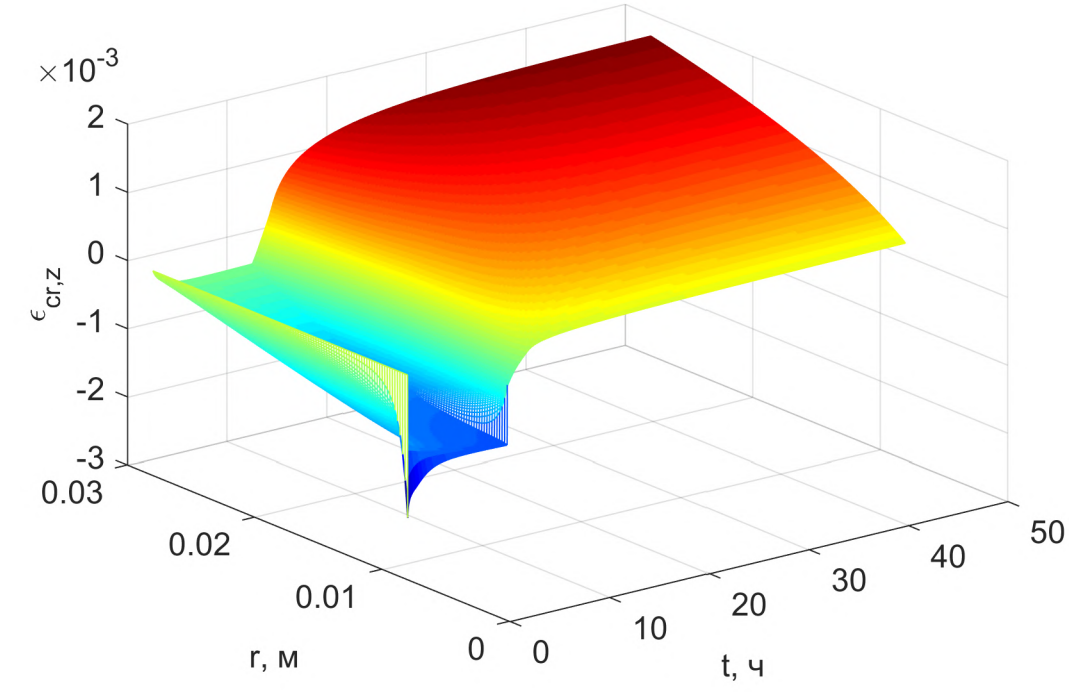
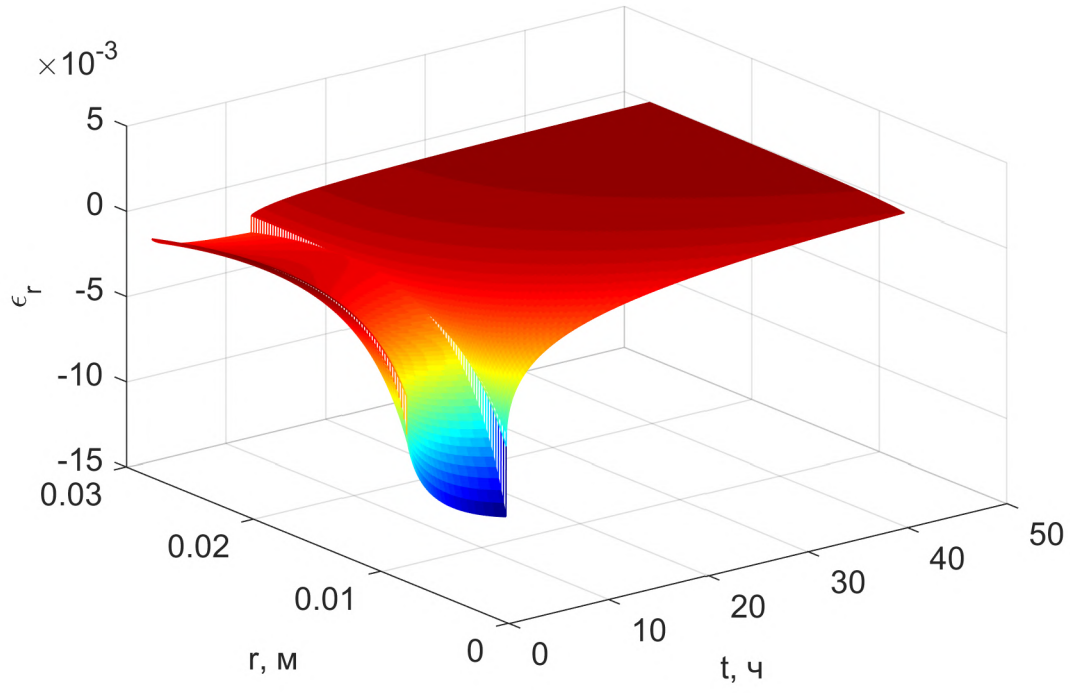


Рисунок 4.33 — Задача 5. Распределение осевых высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,z}$: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

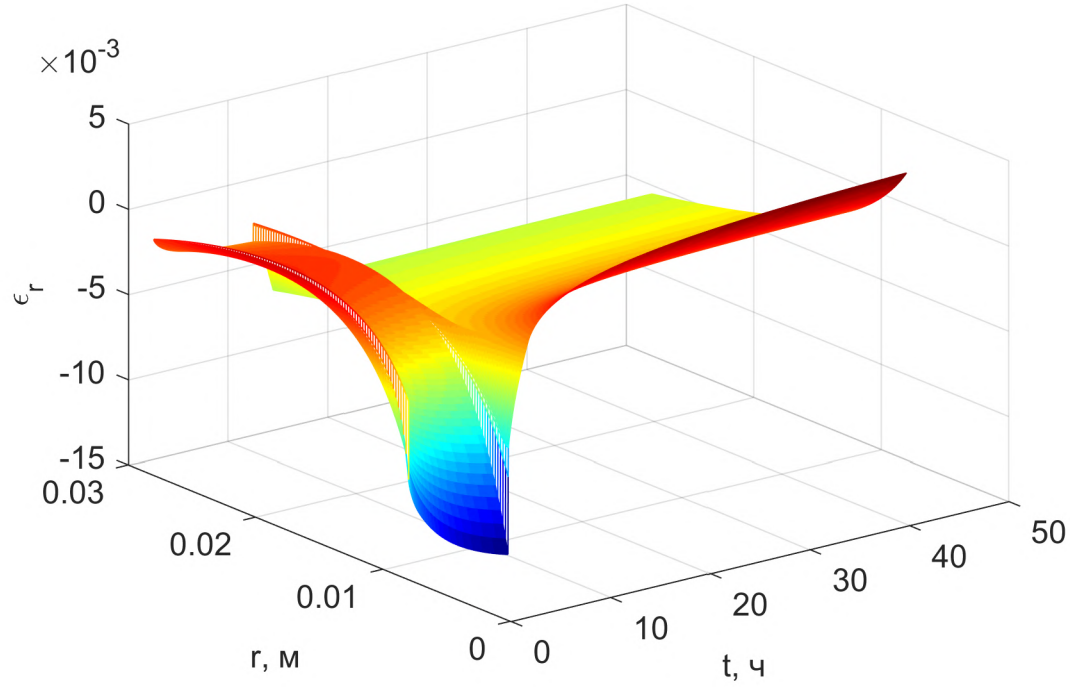
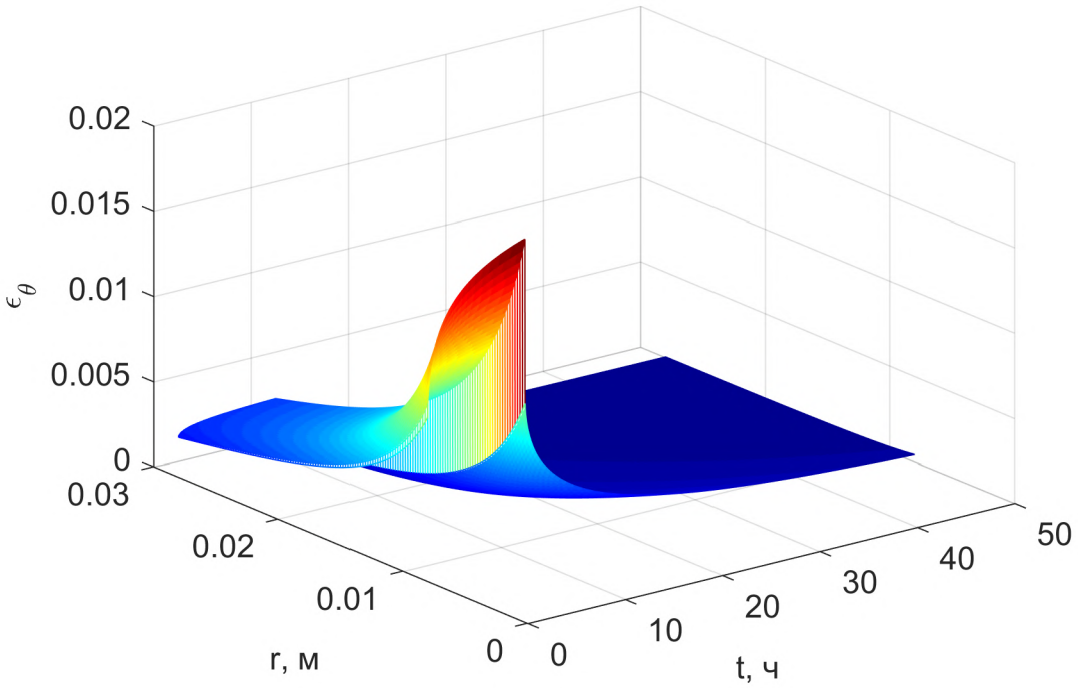


Рисунок 4.34 — Задача 5. Распределение полных радиальных деформаций ε_r: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

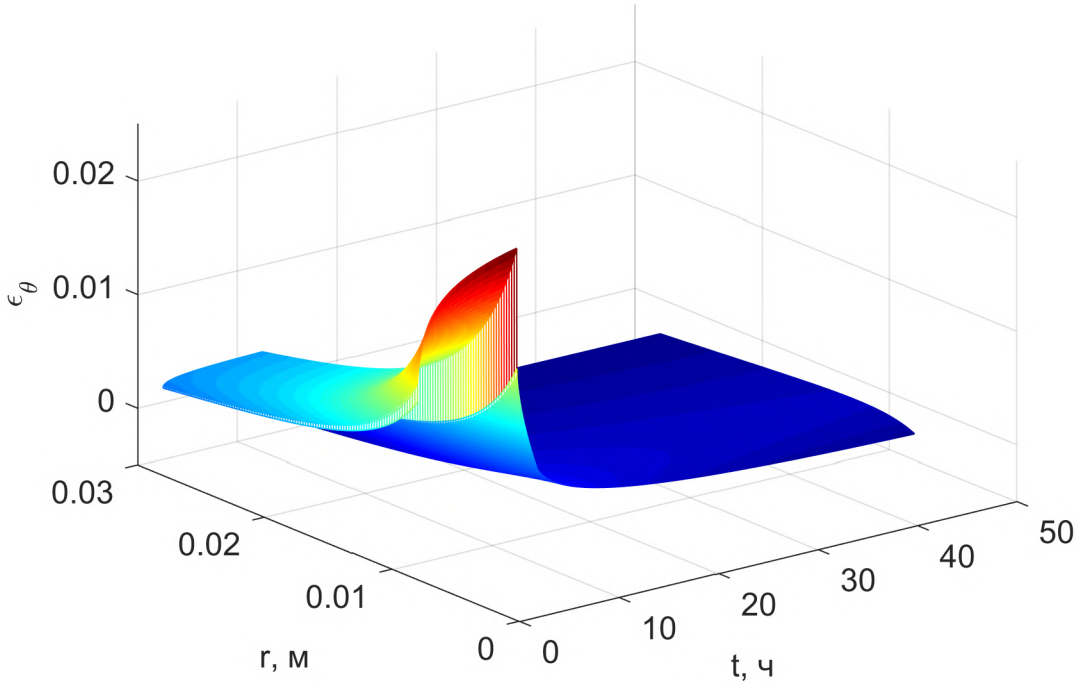
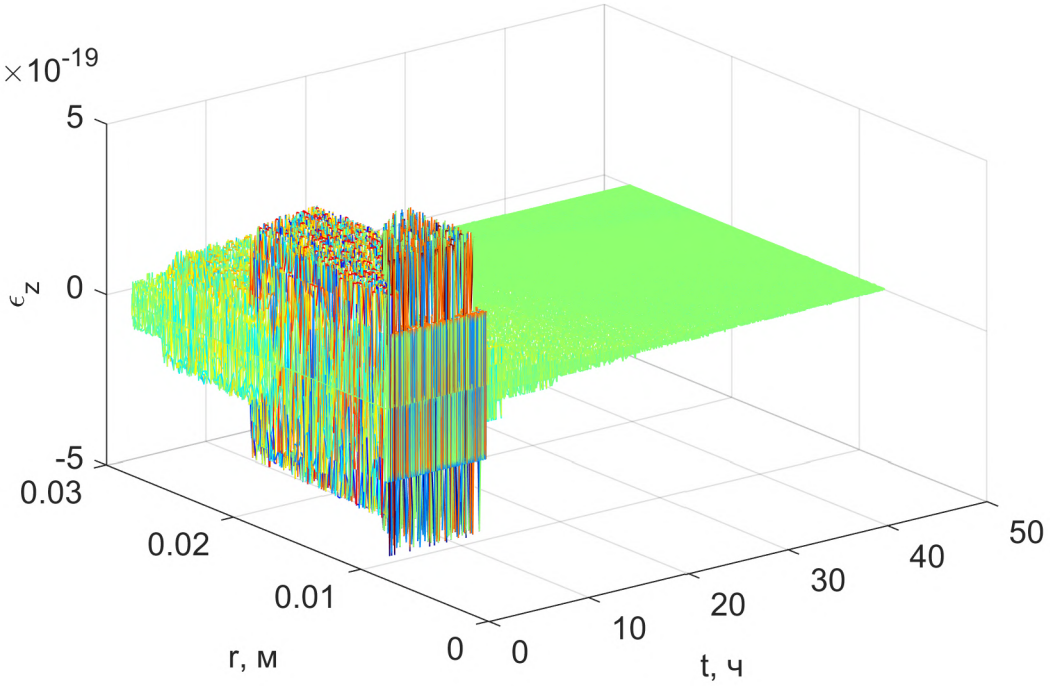


Рисунок 4.35 — Задача 5. Распределение полных окружных деформаций ε_θ: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

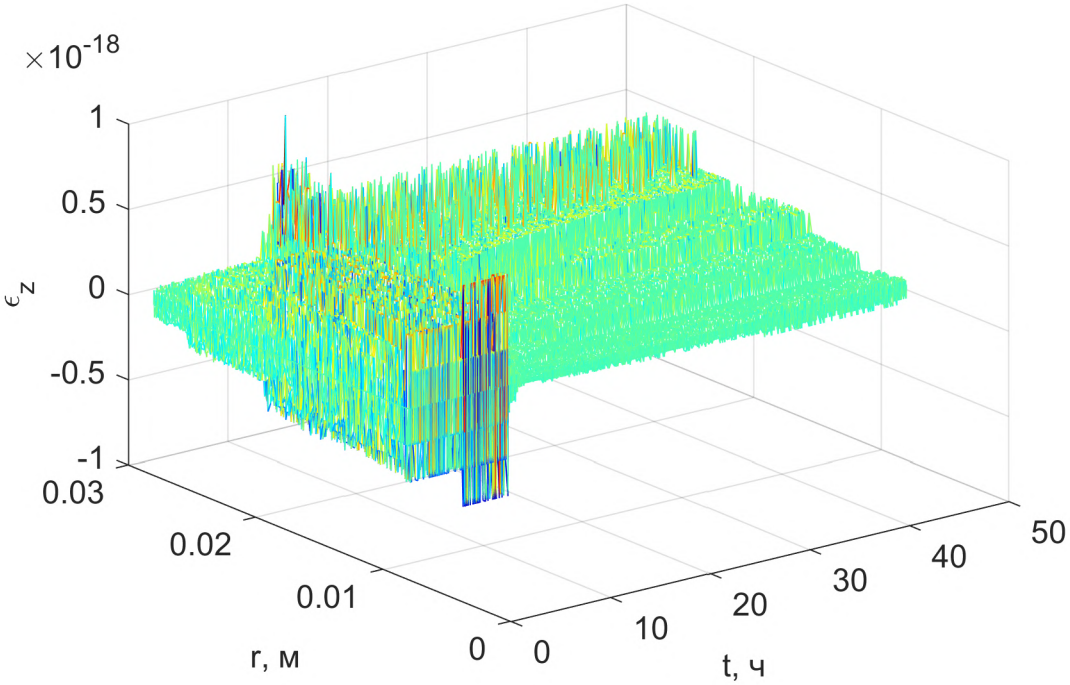
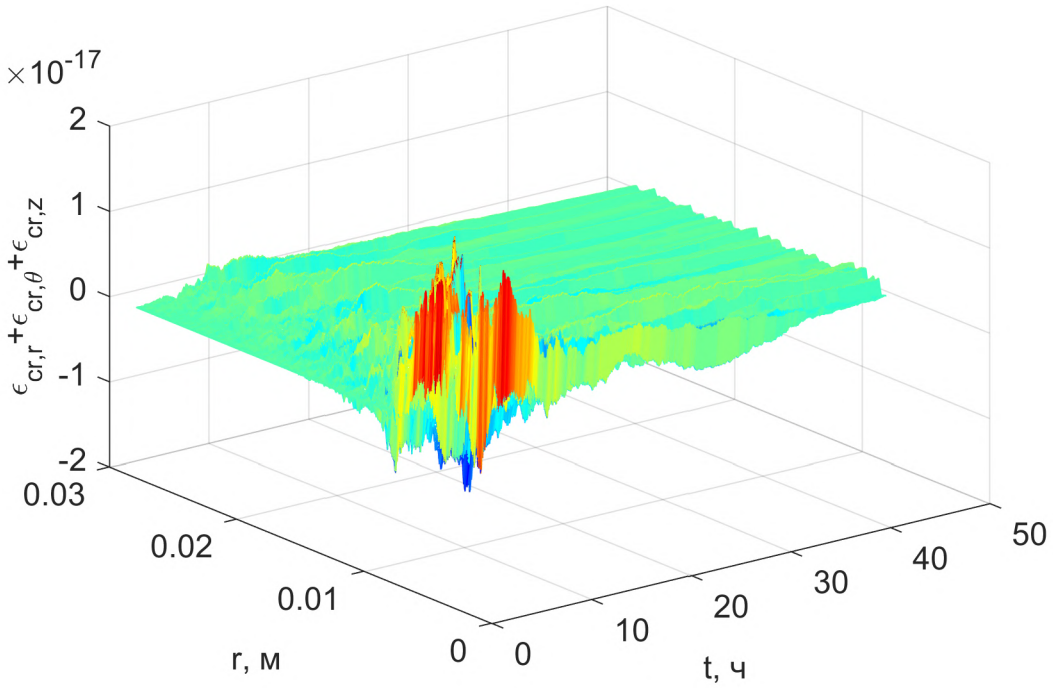


Рисунок 4.36 — Задача 5. Распределение полных осевых деформаций ε_z: а — температура постоянная по радиусу; б — температура переменная по радиусу

а



б

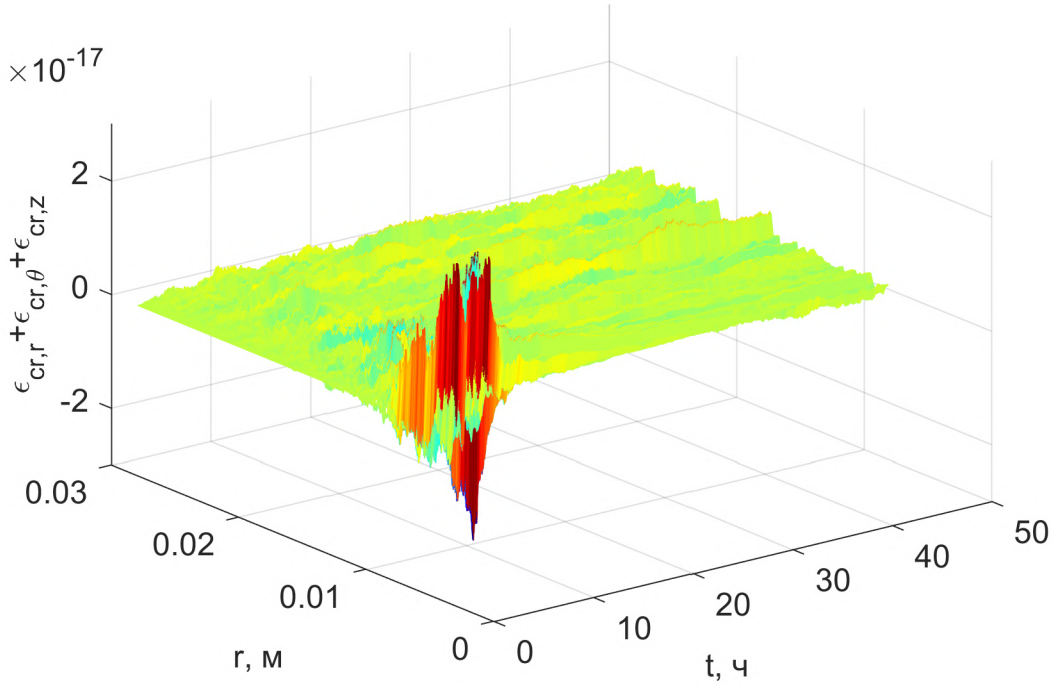


Рисунок 4.37 — Задача 5. Распределение суммы высокоэластических деформаций $\varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}$

4.2 Исследование вращения цилиндра из безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов при больших частотах

В качестве альтернативного материала ЭДТ–10 был рассмотрен цилиндр из безобжимных углеродно–эпоксидных композитных материалов (далее — БУЭКМ). Физико–механические параметры материала были определены ранее в параграфе 2.2 и аппроксимированы полиномиальными выражениями (2.16).

4.2.1 Задача 4.6. Исследование НДС цилиндра в упругой постановке при его вращении с учётом изменения температуры, наведённой неоднородности материала и реологии

Постановка задачи в настоящем параграфе такая же, как и в параграфе 4.1.4, однако материал при этом используется БУЭКМ. Главное отличие заключается в частоте вращения. В настоящем параграфе она составляет 160 оборотов в секунду, против 1000, используемой в параграфе 4.1.4. Связано это с тем, что в при повышении температуры физико–механические свойства БУЭКМ меняются настолько сильно, что в результате решения перемещения превышают величину, используемую в теории малых перемещений. Напряжения при этом не превышают величины 1 МПа по абсолютной величине.

Результаты решений представлены на рисунках 4.38–4.41 (страницы 93–94). При этом графики «а» соответствуют решению задачи I, «б» — задачи II, «в» — задачи III, «г» — задачи IV.

Анализ полученных данных показывает, что в случае БУЭКМ, деформации ползучести разниваются достаточно быстро и не являются весьма выраженными, в отличие от аналогичных результатов в случае ЭДТ–10. При этом решения задач I–IV различаются весьма незначительно.

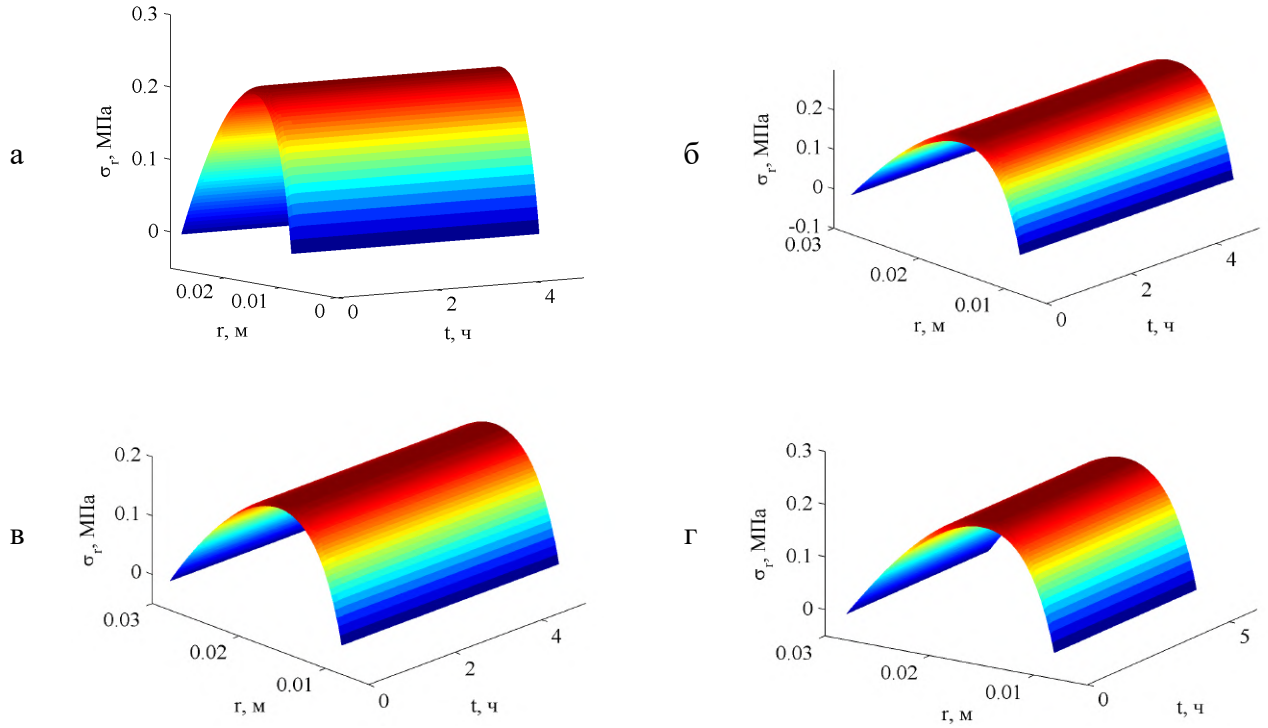


Рисунок 4.38 — Задача 6. График распределения радиальных напряжений σ_r

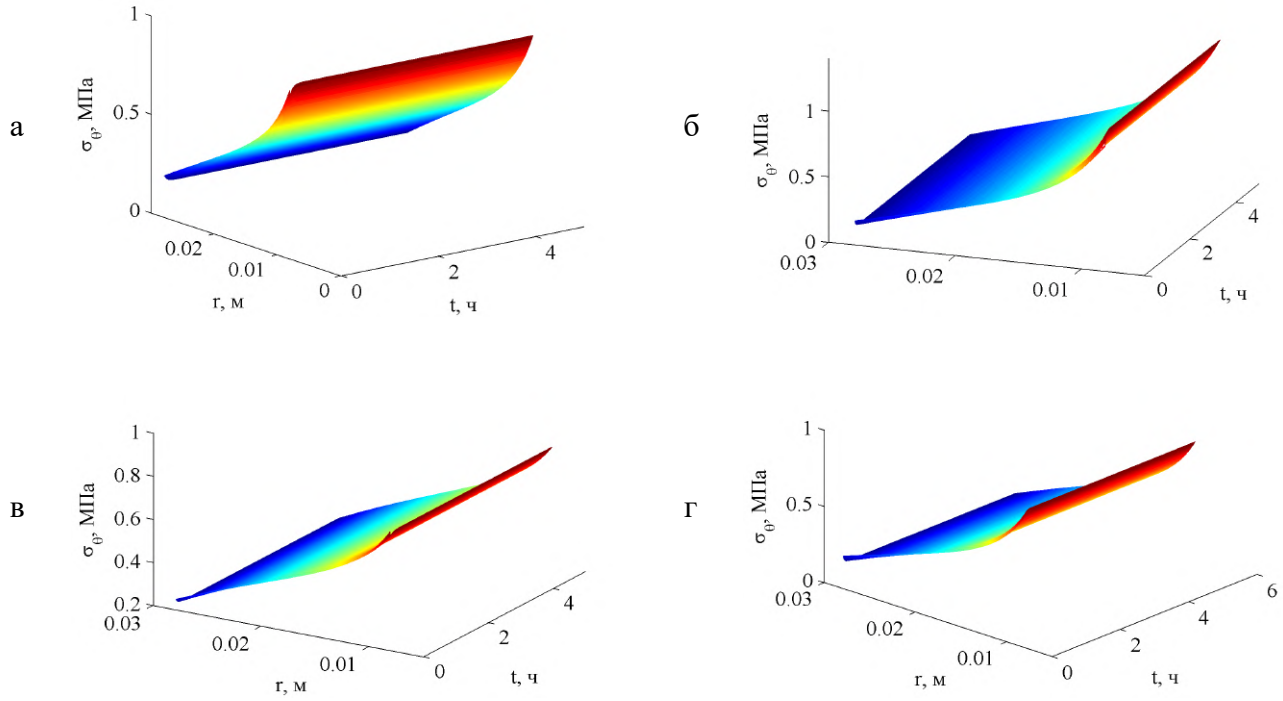


Рисунок 4.39 — Задача 6. График распределения окружных напряжений σ_θ

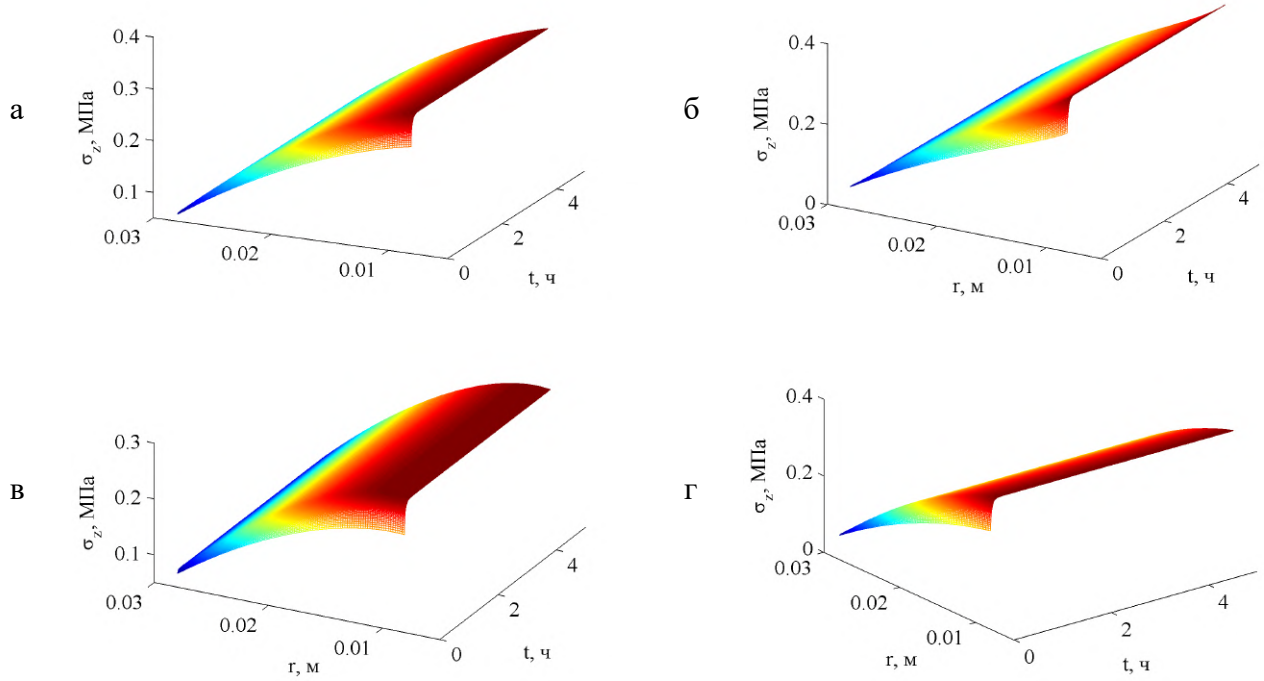


Рисунок 4.40 — Задача 4. График распределения осевых напряжений σ_z

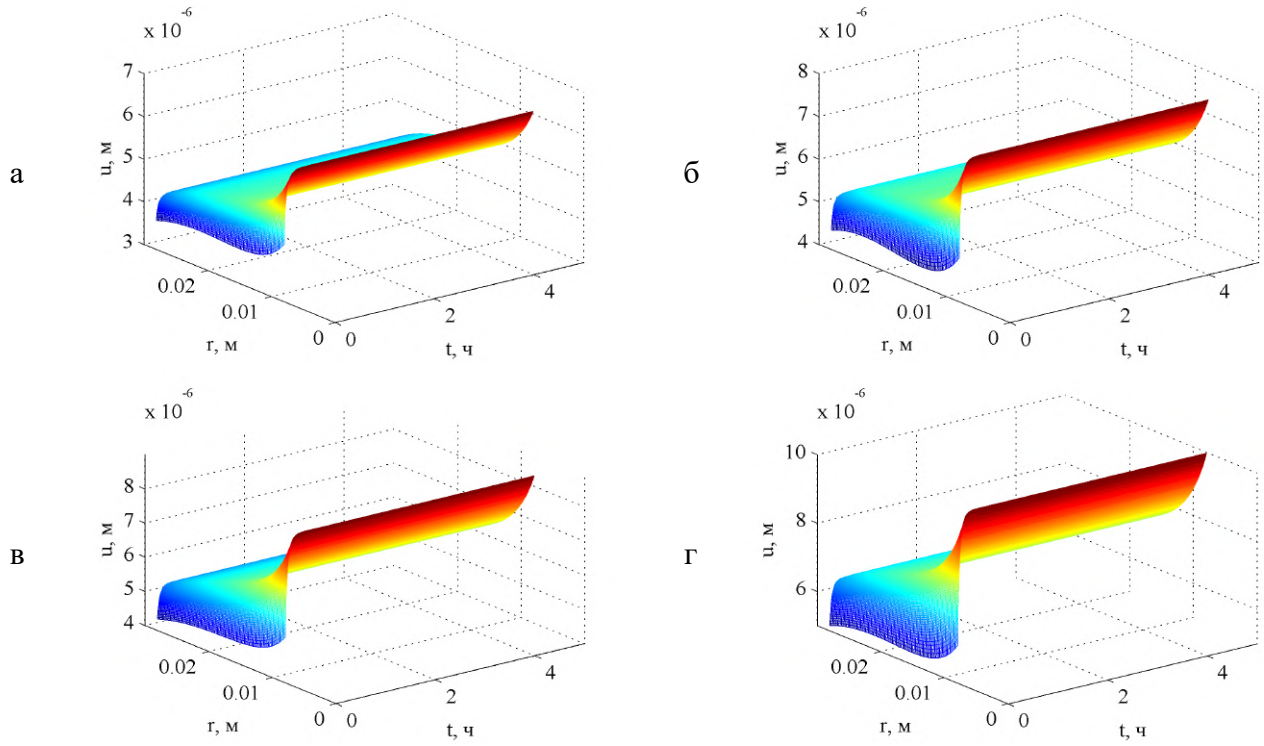


Рисунок 4.41 — Задача 6. График распределения перемещений *u*

4.2.2 Задача 4.7. Моделирование НДС цилиндра при изготовлении изделия

В настоящем параграфе используется такая же постановка задач, что и в параграфе 4.1.5. Однако, частота вращения ограничена величиной 160 оборотов в секунду.

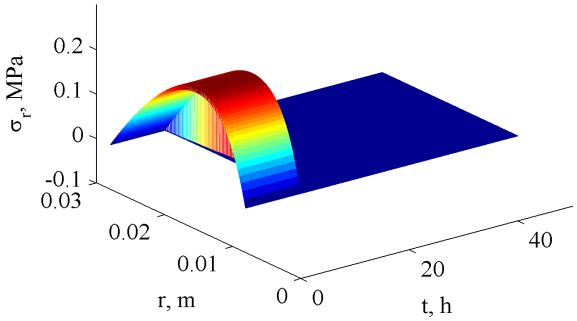
Анализ задачи №1 (без градиента температуры) показывает, что после снятия нагрузки в виде вращения цилиндра к моменту времени 50 ч напряжения и деформации приближаются к нулю. При этом напряжения задачи №2 имеют остаточные величины.

В случаем БУЭКМ учёт температурного влияния приводит к увеличению уровня напряжений до 8 раз.

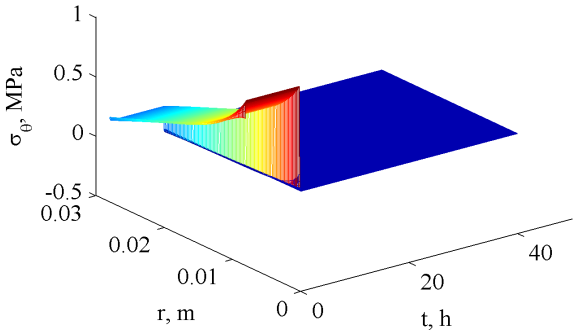
Негативной стороной БУЭКМ является то, что в связи со слабо выраженной деформацией ползучести возникает весьма незначительная релаксация напряжений. Соответственно, полученные благодаря температурному воздействию напряжения сохраняются практически без снижения их уровня, что может крайне негативно сказаться на дальнейших эксплуатационных качествах изделия.

Необходимо отметить, что в случае постановки задачи №1, в теле возникают только растягивающие напряжения, в случае постановки №2 – сжимающие напряжения, превышающие растягивающие более чем в 1.5 раза.

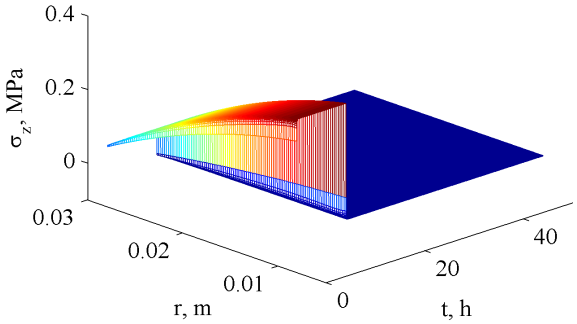
а



а



а



а

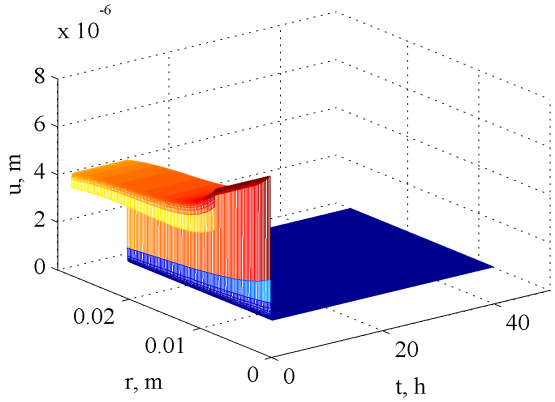
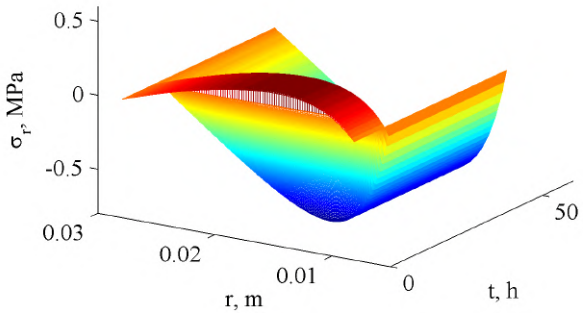
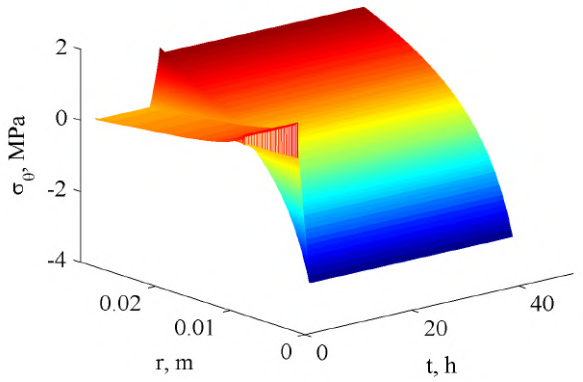


Рисунок 4.42 — Задача 7. Результаты расчёта по постановке №1

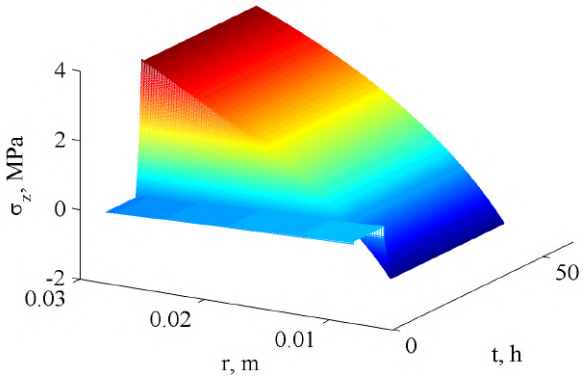
а



а



а



а

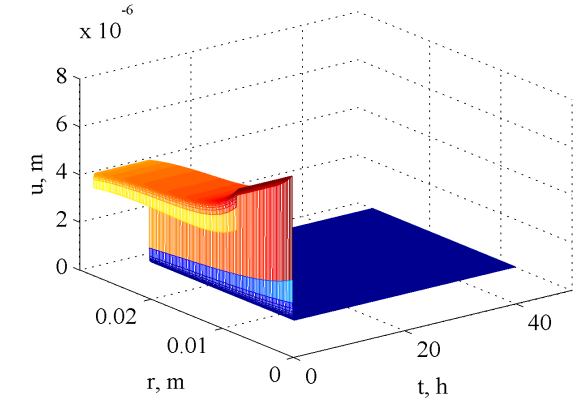


Рисунок 4.43 — Задача 7. Результаты расчёта по постановке №1

4.3 Исследование вращения цилиндра из ЭДТ–10 при малых частотах и большом градиенте температур

С практической точки зрения представляется интерес исследования остаточных напряжений в изделиях из ЭДТ–10 при малых оборотах вращения и больших температурах таких, какие возникают при обработке изделий на токарных станках.

Рассматривается цилиндр из ЭДТ–10, имеющие внутренний размер $R_a = 85$ мм, внешний размер $R_b = 100$ мм. Первоначальная температура всего изделия составляет $20\,^{\circ}C$. Цилиндр начинает вращать с частотой 50 оборотов в секунду. За счёт обработки на внешней поверхности цилиндра начинает повышаться температура до $90\,^{\circ}C$ в течение 0.12 ч. Далее, до периода времени 0.6 ч температура на внешней поверхности не меняется; на внутренней остаётся постоянная температура $20\,^{\circ}C$. Далее с момента времени 0.6 ч до 0.72 ч происходит остывание внешней поверхности цилиндра до температуры $20\,^{\circ}C$. С момента времени 0.72 ч изделие останавливается, то есть частота вращения становится 0. На рисунке 4.44 претставлно распределение температуры как по ходу роста графика времени (а), так и против него (б). Сделано это для возможности наблюдения инерции в изменении температурного поля по толще цилиндра.

Соответственно, при изменении температурного поля, происходит образование косвенной, наведённой, неоднородности в теле. Графики изменения физико–механических параметров полимера представлены на рисунке 4.45. При этом отчётливо виден нелинейный характер распределения коэффициента начальной релаксационной вязкости η_0^*.

Все результаты расчёта представлены на рисунках 4.46–4.49.

Анализ графиков показывает, что максимальные напряжения в процессе нагрева и остывания превышают уровень 10 МПа, как в сжатой зоне, так и в растянутой. В конце расчётного периода остаточные напряжения имеют величину: радиального напряжение $\sigma_r = -0.042606$ МПа; окружные напряжения на внутренней поверхности составили $\sigma_{\theta,\,r=R_a} = -0.103455$ МПа; окружные напряжения на внешней поверхности составили $\sigma_{\theta,\,r=R_b} = 2.41439$ МПа; осевые напряжения на внутренней поверхности составили $\sigma_{z,\,r=R_a} = 0.211768$ МПа; осевые напряжения на внешней поверхности составили $\sigma_{z,\,r=R_b} = 3.03783$ МПа.

Остаточные перемещения в цилиндре весьма малы и составляют не более $2.61234 \cdot 10^{-05}$ м по абсолютной величине.

Вывод по настоящему параграфу 4.3 можно сделать следующий. Основные напряжения, что и логично, возникают в процессе изменения температурного поля и составляют весьма существенные цифры, что может привести к разрушению изделия в процессе изготовления изделия. Особенно необходимо учесть данное явление, если изделие состоит из нескольких материалов, физико–механические и тепло–физические свойства которых отличаются весьма значительно (эпоксидная смола и дерево и т. д.).

а

б

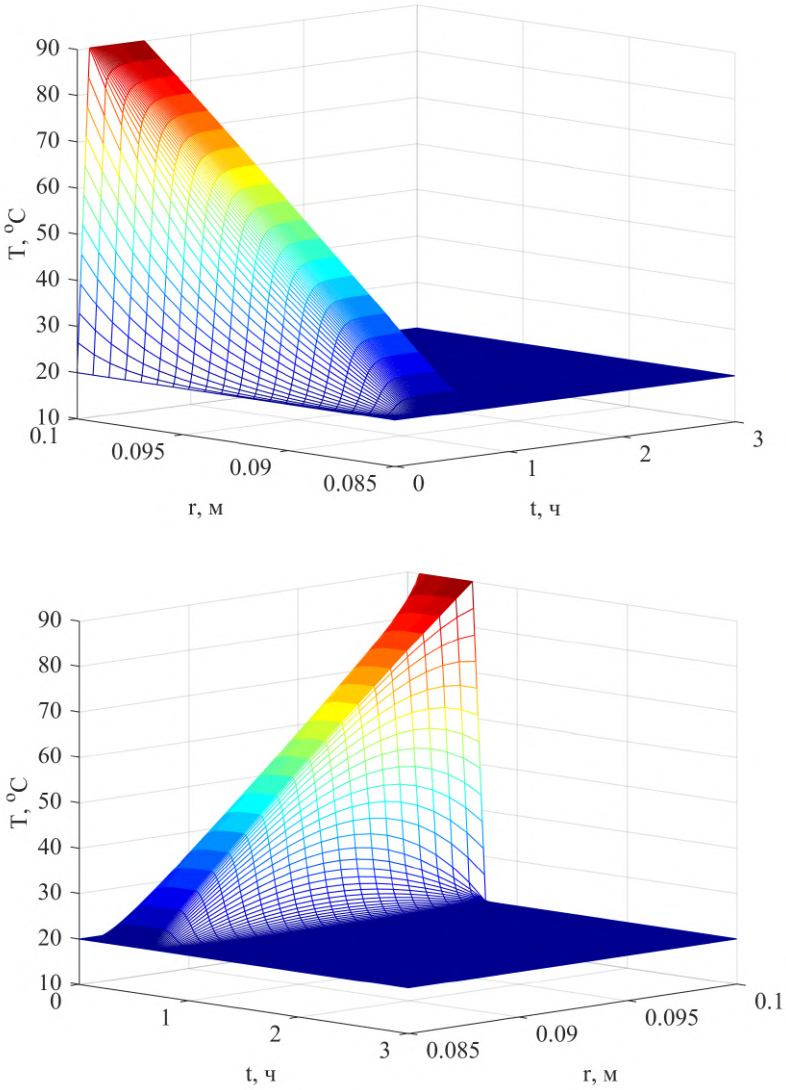
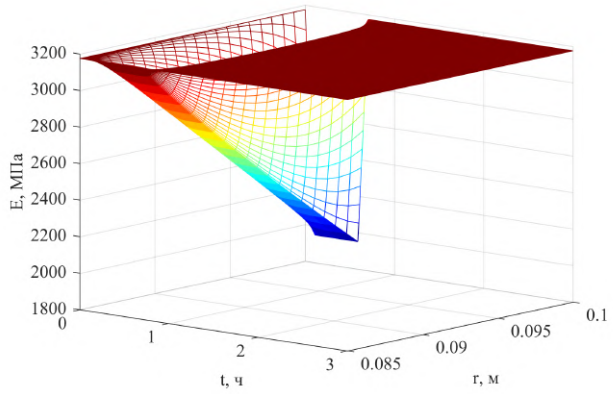
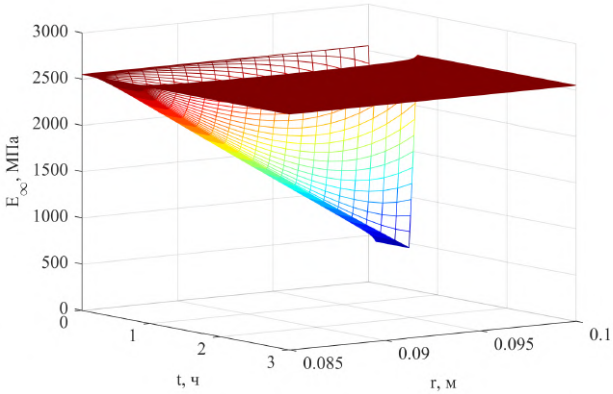


Рисунок 4.44 — Распределение температуры в задаче обработки изделия из ЭДТ–10: а — по ходу роста графика времени; б — против хода роста графика времени

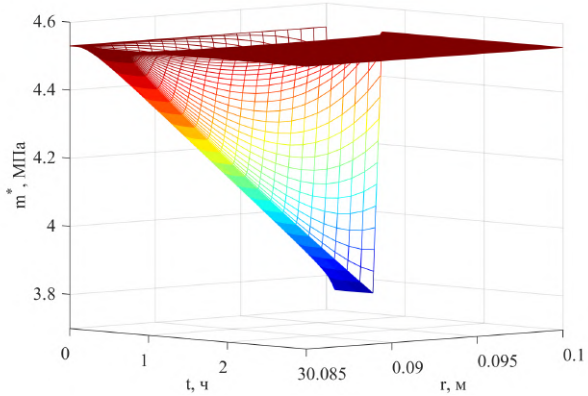
а



б



в



г

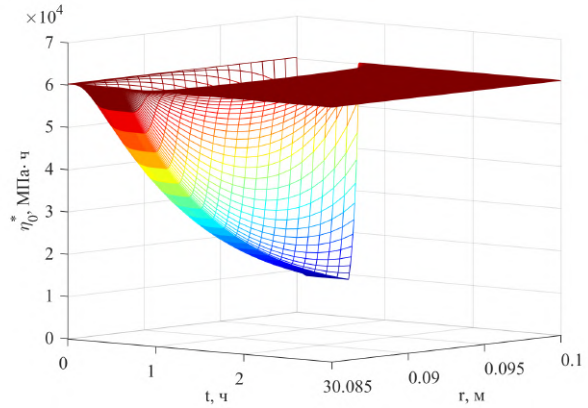
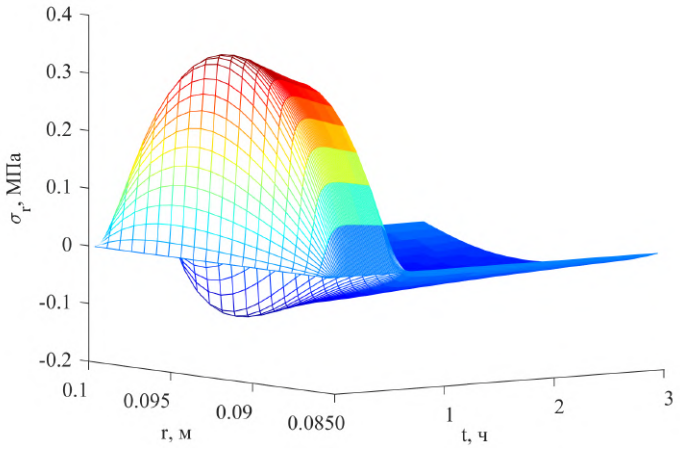
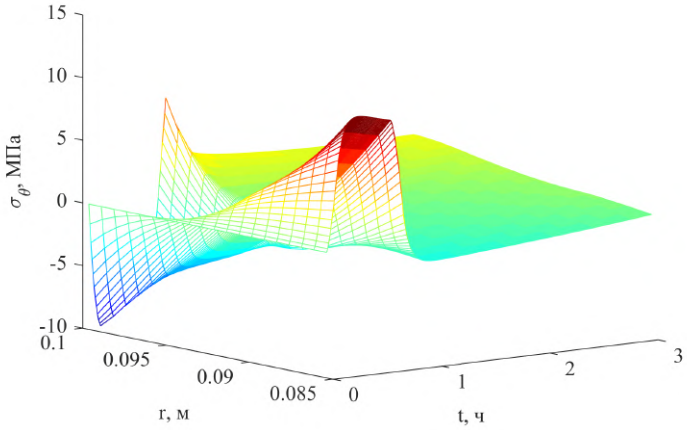


Рисунок 4.45 — Распределение физико–механических параметров в исследуемом цилиндре: а — модуль упругости E; б — модуль высокоэластичности E_∞; в — модуль скорости m^*; г — коэффициент начальной релаксационной вязкости η_0^*

а



б



в

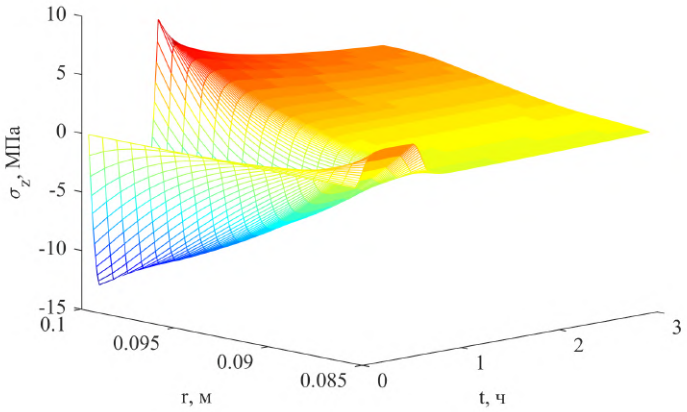
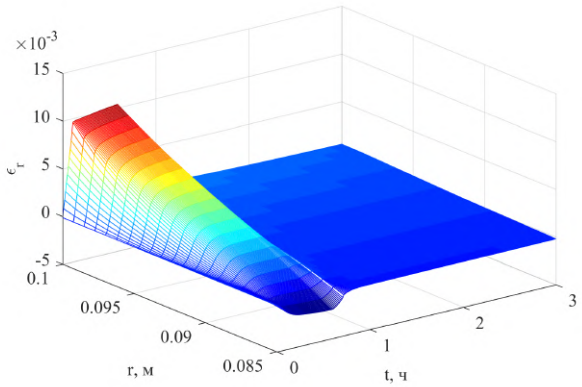
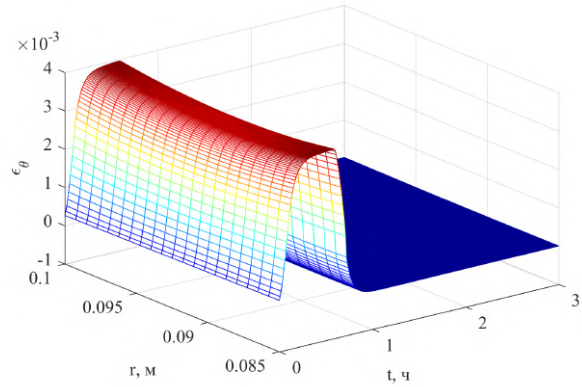


Рисунок 4.46 — Распределение напряжений в цилиндре: а — радиальные σ_r; б — окружные σ_θ; в — осевые σ_z

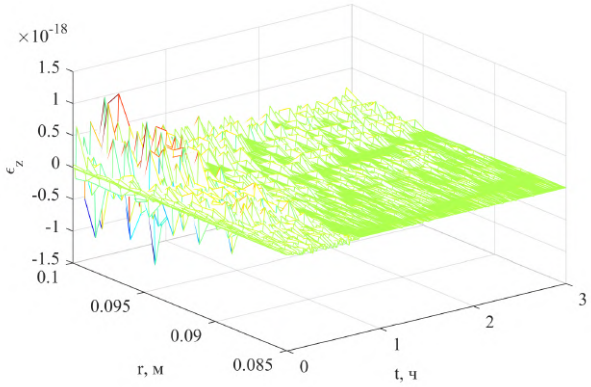
а



б



в



г

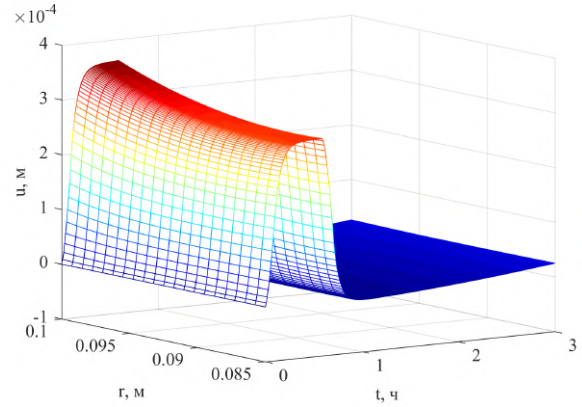
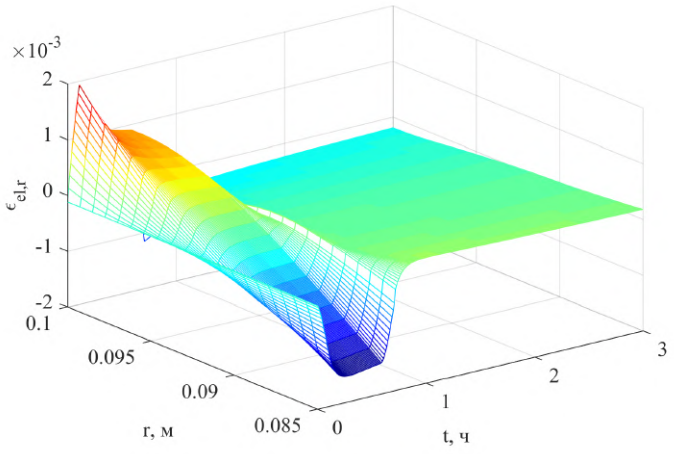
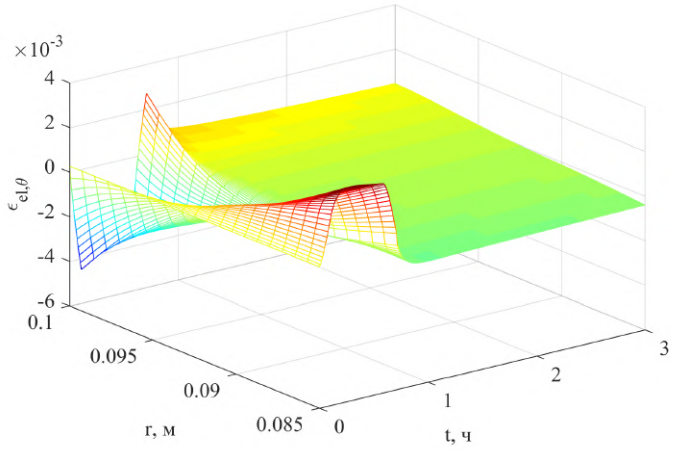


Рисунок 4.47 — Распределение полных деформаций в цилиндре: а — радиальные ε_r; б — окружные ε_θ; в — осевые ε_z; г — перемещения u

а



б



в

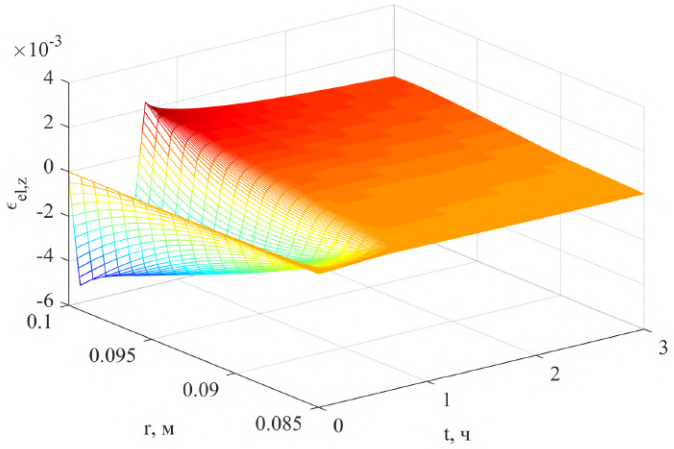
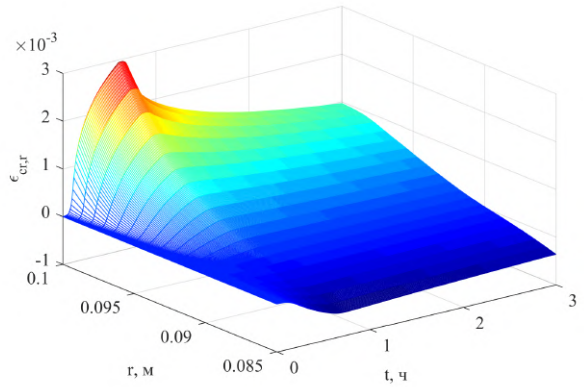
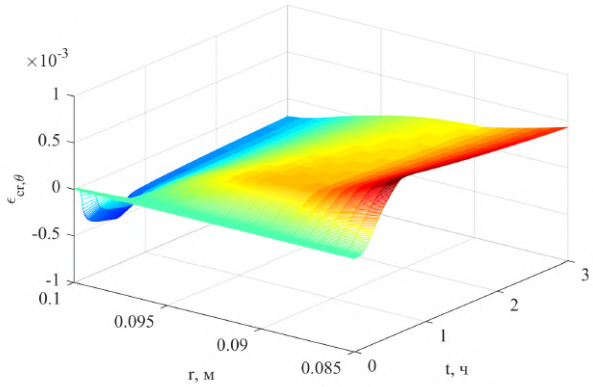


Рисунок 4.48 — Распределение упругих деформаций в цилиндре: а — радиальные $\varepsilon_{el,r}$; б — окружные $\varepsilon_{el,\theta}$; в — осевые $\varepsilon_{el,z}$

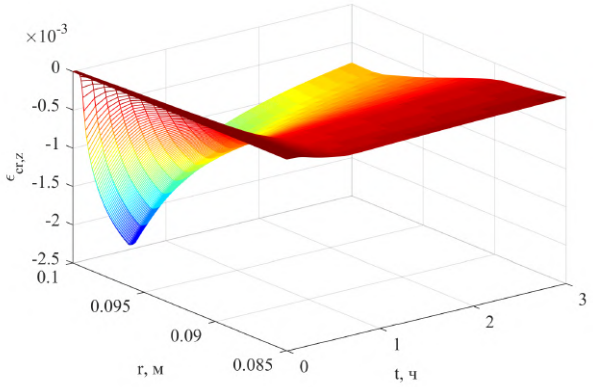
а



б



в



г

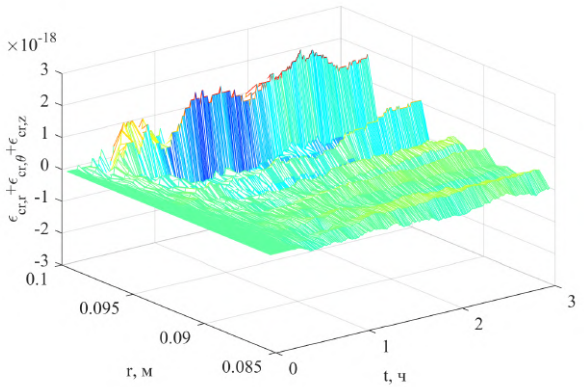


Рисунок 4.49 — Распределение деформаций ползучести в цилиндре: а — радиальные $\varepsilon_{cr,r}$; б — окружные $\varepsilon_{cr,\theta}$; в — осевые $\varepsilon_{cr,z}$; г — $\varepsilon_{cr,r} + \varepsilon_{cr,\theta} + \varepsilon_{cr,z}$

4.4 Выводы по главе

1. При рассмотрении вращающихся полимерных тел исключительно в упруго постановке при постоянной температуре без учета наведённой неоднородности уровень напряжений меняется весьма незначительно и этим изменением можно пренебречь. Изменение начального модуля упругости сказывается только на уровне деформаций.

2. Учёт изменения температурного поля по толщине тела с учётом развития косвенной неоднородности, вызванной изменением модуля упругости материала цилиндра от температуры, приводит к изменению напряжённо-деформированного состояния, по окружным,максимальным, напряжениям.

3. Учёт развития высокоэластических деформаций полимера существенно сказывается на напряжённо-деформированном состояним полимерного вращающегося цилиндра. При этом наибольший рост напряжений происходит только по осевому направлению по сравнению с упругой работой материала.

4. Проведённое моделирование практически важной задачи получения цилиндрического полимерного тела при его вращении требует избегания температурного градиента по толщине тела. В противном случае возможно развитие существенных остаточных напряжений в теле, снижающих эксплуатационные качества изделия.

Заключение

В результате проведённых исследований предложена математическая модель определения НДС вращающихся полимерных изделий цилиндрической формы на основании нелинейного обобщённого уравнения Максвелла–Гуревича и с учётом неоднородности материала, вызванной температурным полем.

На основании анализа результатов можно сделать следующие выводы:

1. Впервые на основе обработки экспериментальных данных получены физико-механические показатели некоторых полимеров как аппроксимирующая степенная функция температуры второго порядка.

2. Получены результаты согласно предложенной методологии исследования оценки НДС рассматриваемых полимеров: эпоксидного связующего ЭДТ–10, безоб-жимных углеродно–эпоксидных композитных материалов и стекло-эпоксидного по-лимера (Glass Epoxy Composite) в условиях термосилового воздействия.

3. Проведено практически важное решение задачи определения остаточных напряжений в полимерном цилиндрическом изделии при изготовлении путем вращения и остывания. Показано развитие существенных остаточных напряжений и деформаций.

4. Усовершенствована методика расчёта основных прочностных показателей вращающихся полимерных изделий в термовязкоупругой постановке.

5. Разработана и реализована в виде пакета прикладных программ для программного комплекса MatLab методика определения остаточных напряжений в полимерных цилиндрических образцах и изделиях в процессе их изготовления в условиях термовязкоупругости.

6. На основании результатов диссертационного исследования были разработаны и внедрены в ГК АКСстрой пакеты прикладных программ для расчета и оценки остаточных напряжений в полимерных оболочках, подвергающихся переменному температурному полю с целью снижения их физико-механических параметров в процессе формирования и изготовления свай. Учёт теоретических изысканий позволил внести корректировки в технологию изготовления оболочек, в результате чего экономический эффект составил до 20 тыс. руб. на изделие, что суммарно составляет до 2 млн. руб. в год.

Литература

1. Holtzberg M. W., Henke S. J., Spaulding L. D. Composite cylinder housing and process: пат. 4726334 США. — 1988.

2. Литвинов, С. В. Исследование напряженно-деформированного состояния цилиндрического тела из модифицированного ПЭВП [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, С. Б. Языев, И. М. Зотов // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 7. — С. 118–122. — URL: http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1488 (дата обращения: 01.10.2019).

3. Литвинов, С. В. Моделирование термоползучести неоднородного толстостенного цилиндра в осесимметричной постановке [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. Е. Дудник // Инженер. вестник Дона. — 2016. — № 2. — URL: http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2y2016/3560 (дата обращения: 19.12.2018).

4. Литвинов, С. В. Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации [Электронный ресурс] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. А. Савченко, С. Б. Языев // Изв. вузов. Химия и хим. технология. — 2019. — Т. 62. — № 5. — С. 78–83. — URL: http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783 (дата обращения: 22.05.2019).

5. Litvinov, S., V. Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick- Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, L. I. Trush, S. B. Yazyev // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С. 1686–1693. — URL: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734 (дата обращения: 19.12.2018).

6. Litvinov, S. V. Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, A. N. Beskopylny, L. I. Trush, S. B. Yazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2017/20/matecconf_spbw2017_04013.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

7. Litvinov, S. V. Some features in the definition of the temperature field in axisymmetric problems [Электронный ресурс] / S. V. Litvinov, L. I. Trush, A. A. Avakov // 2017 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM). — 2017. — С. 1–5. — URL: https://ieeexplore.ieee.org/document/8076449 (дата обращения: 19.12.2018).

8. Trush, L. Optimization of the Solution of a Plane Stress Problem of a Polymeric Cylindrical Object in Thermoviscoelastic Statement [Электронный ресурс] / L. Trush, S. Litvinov, N. Zakieva, S. Bayramukov // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent

Systems and Computing. — Т. 692. — С. 885—893. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_95 (дата обращения: 19.12.2018).

9. Литвинов, С. В. Напряжённо-деформированное состояние тел вращения в вязкоупругой постановке [Текст] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. А. Аваков // Строительство и архитектура — 2017: материалы науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: ДГТУ, 2017. — С. 186–194.

10. Литвинов, С. В. Особенности расчёта бетонных цилиндрических тел под темпера-турным нагружением [Текст] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш // Строительство–2015: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2015. — С. 115–117.

11. Литвинов, С. В. Прогнозирование прочности адгезионного соединения в течение длительного периода времени [Текст] / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, Е. Н. Пищеренко, А. А. Аваков // Материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 162–167.

12. Литвинов, С. В. Равнопрочные и равнонапряжённые конструкции: преимущества и недостатки [Текст] / С. В. Литвинов, А. С. Чепурненко, Л. И. Труш // Строительство–2014: материалы Междунар. науч.-практ. конф. — Ростов н/Д: РГСУ, 2014. — С. 189–190.

13. Труш, Л. И. Оптимизация решения плоской задачи полимерного цилиндрического тела в термовязкоупругой постановке [Текст] / Л. И. Труш, С. В. Литвинов, Е. Н. Пищеренко, А. Е. Дудник // материалы XIII междунар. науч.-практ. конф. — Нальчик: КБГУ, 2017. — С. 246–253.

14. Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2018616951 / Литвинов С. В., Дудник А. Е., Аваков А. А., Труш Л. И.; Дон. гос. техн. ун-т. — № 2018614101; заявл. 24.04.2018; зарег. 09.06.2018.

15. Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения: свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ № 2020660684 / Хаширова С. Ю., Лесняк Л. И., Литвинов С. В., Языев С. Б., Молоканов Г. О., Чепурненко А. С.; Кабардино-Балкарский гос. ун-т. — № 2020617798; заявл. 27.07.2020; зарег. 09.09.2020.

16. Гагаринские чтения — 2016: XLII Международная молодёжная научная конференция: Сборник тезисов докладов: В 4 т. — М.: Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), 2016.

17. Пластмассы в машиностроении и приборостроении: сборник статей [Текст]. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

18. Саввина, А. В. Прочностные характеристики армированных полиэтиленовых труб при низких температурах: дис. …канд. техн. наук: 01.02.06 / Саввина Александра Витальевна. — Якутск, 2017. — 101 с.

19. Архангельский, Б. А. Суда из пластмасс [Текст] / Б. А. Архангельский, И. М. Альшиц. — Л.: Судпромгиз, 1963.

20. Денисюк, М. Н. Структура, область применения, основные преимущества и недостатки современных композиционных материалов [Электронный ресурс] / М. Н. ДЕНИСЮК, В. В. Артемов, И. А. Прокопов // Вольский военный институт материального обеспечения. — 2015. — № 2 (36). — С. 161–163. — URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_25114187_54179818.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

21. Киселев, Б. А. Стеклопластики [Текст] / Б. А. Киселев. — М.: Госхимиздат, 1962.

22. Карпин, В. Л. Опыт применения пластмасс при изготовлении технологической оснастки [Текст] / В. Л. Карпин // Пластмассы в машиностроении и приборостроении. — Киев: Гостехиздат УССР, 1961.

23. Тарасюк, А. П. Влияние качества поверхностного слоя волокнистых полимерных композитов после механической обработки на их эксплуатационные свойства [Текст] / А. П. Тарасюк // Високі технології в машинобудуванні (High technologies of machine-building) : зб. наук. пр. — Харків: НТУ <<ХПІ>>, 2012. — Вип. 1 (22). — С. 281–290.

24. Андреевская, Г. Д. Высокопрочные ориентированные стеклопластики [Текст] / Г. Д. Андреевская. — Наука, 1966. — 370 с.

25. Бейдер, Э. Я. Стеклопластики на термопластичной матрице [Текст] / Э. Я. Бейде и др. //Труды ВИАМ. — 2013. — №7. — С. 3.

26. Давыдова, И. Ф. Стеклопластики в конструкциях авиационной и ракетной техники [Текст] / И. Ф. Давыдов, Н. С. Кавун // Стекло и керамика. — 2012. — № 4. — С. 36–42.

27. Раскутин, А. Е. Углепластики и стеклопластики нового поколения [Текст] / А. Е. Раскутин, И. И. Соколов // Труды ВИАМ. — 2013. — № 4. — С. 9.

28. Иванов, А. Г. Влияние структуры армирования на предельную деформируемость и прочность оболочек из ориентированного стеклопластика при взрывном нагружении изнутри [Текст] / АГ. Иванов, М. А. Сырунин, А.Г. Федоренко // ПМТФ. — 1992. — Т. 33. — № 4. — С. 130.

29. Зеленский, Э. С. Армированные пластики–современные конструкционные материалы [Текст] / Э. С. Зеленский и др. // Рос. хим. ж. (Ж. Рос. хим. об-ва им. Д. И. Менделеева). — 2001. — Т. 45. — № 2. — С. 56–74.

30. Рабинович, А. Л. Уравнения связи при плоском напряженном состоянии ориентированных стеклопластиков [Текст] // Доклады АН СССР. — 1963. — Т. 153. — № 4.

31. Саркисян, Н. Е. Выносливость и деформативность ориентированного стеклопластика при высокой частоте нагружения [Текст] // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. — 1974. — Т. 27. — № 6. — С. 74–82.

32. Тарнопольский, Ю. М. Учет сдвигов при изгибе ориентированных стеклопластиков [Текст] / Ю. М. Тарнопольский, А. В. Розу, В. А. Поляков // Механика полимеров. — 1965. — № 2. — С. 38.

33. Томашевский, В. Т. Ползучесть и длительная прочность при междуслойном сдвиге ориентированных стеклопластиков [Текст] / В. Т. Томашевский, А. А. Туник // Механика полимеров. — 1971. — № 6. — С. 1003.

34. Огибалов, П. М. Механика армированных пластиков [Текст] / П. М. Огибалов, Ю. В. Суворова. — М.: МГУ, 1965.

35. Шамбина, С. Л. Анизотропные композитные материалы и особенности расчета конструкций из них [Текст] / С. Л. Шамбина // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2005. — № 1.

36. Александров, А. П. Изучение полимеров. Высокоэластичная деформация полимеров [Текст] / А. П. Александров, Ю. С. Лазуркин // Журнал технической физики. — 1939. — Т. 9. — № 14.

37. Александров, А. П. Морозостойкость высокомолекулярных соединений [Текст] / А. П. Александров //Труды I и II конф. по высокомолекулярным соединениям. — М.–Л.: Изд-во АН СССР. — 1945. — С. 49–59.

38. Александров, К. С. Упругие свойства кристаллов (обзор) [Текст] / К. С. Александров, Т. В. Рыжова. — Кристаллография, вып. 2, 1961. — С. 289–314.

39. Аскадский, А. А. Введение в физико-химию полимеров [Текст] / А. А. Аскадский, А. Р. Хохлов — М.: Научный мир, 2009. — 384 с.

40. Козлов, Г. В. Кластерная модель аморфного состояния полимеров [Текст] / Г. В. Козлов, В. У. Новиков // Успехи физических наук. — 2001. — Т. 171. — № 7. — С. 717–764.

41. Лазуркин, Ю. С. Механические свойства полимеров в стеклообразном состоянии: дисс. …д-ра. физ.-матем. наук. — М.: Ин-т физических проблем им. С. И. Вавилова, 1954.

42. Лазуркин, Ю. С. О природе больших деформаций высокомолекулярных веществ в стеклообразном состоянии [Текст] / Ю. С. Лазуркин, Р. Л. Фогельсон // ЖТФ. — Т. 21, вып. 3. — 1951. — С. 267–286.

43. Лейбфриед, Г. Микроскопическая теория механических и тепловых свойств кристаллов [Текст] / Г. Лейбфриед., Б. Я. Мойжес. — Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1963. — 312 с.

44. Слонимский, Г. Л. Краткие очерки по физико-химии полимеров [Текст] / Г. Л. Сломинский. — М.: Химия, 1967. — 231 с.

45. Тагер, А. А. Физико-химия полимеров [Текст] / А. А. Тагер. — М.: Рипол Классик, 1978. — 545 с.

46. Тобольский, А. Свойства и структура полимеров [Текст] / А. Тобольский. — М.: Химия, 1964. — 322 с.

47. Алфрей, Т. Механические свойства высокополимеров [Текст] / Т. Алфрей. — М.–Л.: ИЛ, 1952.

48. Трелоар, Л. Физика упругости каучука [Текст] / Л. Трелоар. — М.–Л., ИЛ, 1953. — 240 с.

49. Работнов, Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций [Текст] / Ю. Н. Работнов. — М., 1966. — 752 с.

50. Ильюшин, А. А. Квазилинейная теория вязкоупругости и метод малого параметра [Текст] / А. А. Ильюшин, П. М. Огибалов // Механика полимеров. — 1966. — №2. — С. 170–189.

51. Малмейстер, А. К. Сопротивление жестких полимерных материалов [Текст] / А. К. Малмейстер, В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс. — Рига: Зинатнс, 1972. — С. 498.

52. Гуревич, Г. И. О зависимости между напряжениями и перемещениями при больших деформациях в случае одномерной задачи [Текст] / Г. И. Гуревич, А. Л. Рабинович // Тр. ИФЗ АН СССР. — 1959. — № 2.

53. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров [Текст] / А. Л. Рабинович. М.: Наука, 1970. — 482 с.

54. Гуревич, Г. И. О законе деформации твердых и жидких тел [Текст] / Г. И. Гуревич // Журнал технической физики. — 1947. — Т. 17. — № 12. — С. 1491–1502.

55. Гуревич, Г. И. О соотношении упругих и остаточных деформаций в общем случае однородного напряженного состояния [Текст] / Г. И. Гуревич // Труды Геофиз. ин-та АН СССР. — 1953. — № 21. — С. 49–90.

56. Гуревич, Г. И. О зависимости между тензорами напряжений и скоростей деформации в общем случае больших и малых деформаций [Текст] / Г. И. Гуревич // Доклады Академии наук. — Российская академия наук, 1958. — Т. 120. — № 5. — С. 987–990.

57. Гуревич, Г. И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последействия [Текст] / Г. И. Гуревич // Тр. Ин-та Физики Земли АН СССР. — 1959. — Т. 2. — С. 169.

58. Советы и рекомендации по моделированию ползучести материалов в методе конечных элементов [Электронный ресурс] // Софт Инжиниринг Групп. — URL: https://www.ansys.soften.com.ua/about-ansys/blog/138-sovety-i-rekomendatsii-po-modelirovaniyu-polzuchesti-materialov-v-metode-konechnykh-elemen html

59. Viscoelasticity [Электронный ресурс] // SHARCNET. — URL: https://www.sharcnet.ca/Software/Ansys/16.2.3/en-us/help/ans_mat/evis.html (дата обращения: 19.12.2018)

60. Solid Works Simulation. Вязкоупругая модель [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: https://help.solidworks.com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Viscoelastic_Model.htm (дата обращения: 19.12.2018).

61. Solid Works Simulation. Модель ползучести [Электронный ресурс] // SOLIDWORKS Web Help. — URL: https://help.solidworks.com/2019/Russian/SolidWorks/cworks/c_Creep_Model.htm?id=90ac0cb6180d4b5f958dc1682659e7cc#Pg0 (дата обращения: 19.12.2018).

62. Бабич, В. Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики жёстких сетчатых полимеров: дис. …канд. физ.-матем. наук / Учен. совет по механике и материаловедению полимеров при науч.-исслед. физ.-хим. ин-те им. Л. Я. Карпова. — М., 1966.

63. Бабич, В. Ф. К вопросу о корреляции между равновесным модулем высокоэластичности и числом сшивок в жёстких сетчатых полимерах [Текст] / В. Ф. Бабич, Ю. М. Сивергин, А. А. Берлин, А. Л. Рабинович // Механика полимеров. — 1966. — № 1.

64. Рабинович, А. Л. Некоторые основные вопросы механики армированных полимеров: автореф. д-ра ф.-м. наук. М. — 1965.

65. Ишлинский, А. Ю. Продольные колебаний стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации [Текст] / А. Ю. Ишлинский // ПММ. — 1940. — № 4, вып. 1.

66. Ишлинский, А. Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязко-пластичных тел [Текст] / А. Ю. Ишлинский // Изв. АН СССР, ОТН. — 1945. — № 3.

67. Ферри, Д. Вязко-упругие свойства полимеров [Текст] / Д. Ферри. — М.: ИЛ, 1964.

68. Аменадзе, Ю. А. Теория упругости: учебник для университетов [Текст] / Ю. А. Аменадзе. — М.: Высшая школа, 1976. — 272 с.

69. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография [Текст] / В. И. Андреев. — М.: Издательство АСВ, 2002. — 288 с.

70. Баландин, М. Ю. Векторный метод конечных элементов: учебное пособие [Текст] / М. Ю. Баландин, Э. П. Шурина. — Новосибирск: изд-во НГТУ, 2001. — 69 с.

71. Вайнберг, М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений [Текст] / М. М. Вайнберг. — М.: Наука, 1972. — 416 с.

72. Гилбарг, Д. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка: пер. с англ. [Текст] / Д. Гилбарг, Н. Трудингер, Л. П. Купцова. — М.: Наука, 1989. — 464 с.

73. Калиткин, Н. Н. Численные методы: справочное пособие [Текст] / Н. Н. Калиткин. — М.: Наука, 1978. — 512 с.

74. Ладыженская, О. А. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа [Текст] / О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева. — М.: Наука, 1973. — 576 с.

75. Миранда, К. Уравнения с частными производными эллиптического типа: пер. с итал. яз. [Текст] / К. Миранда. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957. — 256 с.

76. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений [Текст] / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 352 с.

77. Соболев, С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике [Текст] / С. Л. Соболев. — М.: Наука, 1988. — 336 с.

78. Рабинович, А. Л. Некоторые механические характеристики плёнок, бутварфенольного полимера [Текст] / А. Л. Рабинович // Высокомол. соед. — 1959. — № 7.

79. Дудник, А. Е. Моделирование прочностных характеристик и прогнозирование несущей способности напорных труб из полиолефинов: дис. …канд. техн. наук: 02.00.06 / Дудник Анастасия Евгеньевна. — Нальчик, 2016. — 133 с.

80. Дудник, А. Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Пластические массы. — 2016. — № 1–2. — С. 30–33.

81. Chepurnenko, A. S. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures [Электронный ресурс] / A. S. Chepurnenko, V. I. Andreev, A. N. Beskopylny, B. M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2016. — Т. 67. — С. 06059. — URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/pdf/2016/30/matecconf_smae2016_06059.pdf (дата обращения: 19.12.2018).

82. Dudnik, A. E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Электронный ресурс] / A. E. Dudnik, A. S. Chepurnenko, S. V. Litvinov // International Polymer Science and Technology. — 2017. — Т. 44 (1). — С. 30–33. — URL: http://www.polymerjournals.com/journals.asp?Search=YES&JournalID=102975&JournalType=ipsat (дата обращения: 19.12.2018).

83. Соловьева, Е. В. Исследование релаксационных свойств первичного и вторичного поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева, А. А. Аскадский, М. Н. Попова // Пластические массы. — 2013. — № 2. — С. 54–62.

84. Соловьева, Е. В. Экспериментальные исследования релаксации напряжения поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева // Наука, техника и образование. — 2015. — № 8. — С. 26–28.

85. Турусов, Р. А. Механические явления в полимерах и композитах (в процессе формирования): дис. …д-ра физ.-мат. наук: 01.04.17 / Турусов Роберт Алексеевич. — М., 1983. — 363 с.

86. Lorandi, N. P. On the creep behavior of carbon/epoxy non-crimp fabric composites / Natália Pagnoncelli Lorandia, Maria Odila Hilário Cioffib, Carlos Shiguec, Heitor Luiz Ornaghi Jr. // Materials Research. — 2018. — Т. 21. — № 3. — URL: https://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1516-14392018005012103&script=sci_arttext.

87. Katouzian M., Creep Response of Neat and Carbon-Fiber-Reinforced PEEK and Epoxy Determined Using a Micromechanical Model / M. Katouzian, S. Vlase // Symmetry. — 2020. — Т. 12. — № 10. — С. 1680.

88. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов: учебное издание [Текст] / Л. Сегерлинд; под ред. Б. Е. Победри. — М.: Мир, 1979. — 392 с.

89. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. Н. Кобельков. — М.: БИНОМ. Лаб. знаний, 2003. — 632 с.

90. Турчак, Л. И. Основы численных методов: учебное пособие [Текст] / Л. И. Турчак, П. В. Плотников. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 304 с.

91. Литвинов, С. В. Нелинейная ползучесть неоднородных многослойных цилиндров и сфер: дис. …канд. техн. наук: 01.02.04 / Литвинов Степан Викторович. — М., 2010. — 200 с.

92. Языев, Б. М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров: дис. …канд. техн. наук: 01.02.04 / Языев Батыр Меретович. — М., 1990. — 171 с.

93. Языев, Б. М. Особенности релаксационных свойств сетчатых и линейных полимеров и композитов на их основе: дис. …д-ра техн. наук: 02.00.06 / Языев Батыр Меретович. — Нальчик, 2009. — 352 с.

94. Новиченок, Л. Н. Теплофизические свойста полимеров [Текст] / Л. Н. Новиченок, Э. П. Шульман. — Минск: Наука и техника, 1971. — 120 с.

95. Турусов, Р. А. Адгезионная механика: монография [Текст] / Р. А. Турусов. — 2-е изд. — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 232 с.

96. Турусов, Р. А. Длительная проность адгезионных соединений при нормальном отрыве [Текст] / Р. А. Турусов, А. Я. Горенберг, Б. М. Языев // Клеи. Герметики, Технологии. — 2011. — № 7. — С. 17–25.

Приложения

Глава А. Свидетельства регистрации программ ЭВМ

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2018616951

Моделирование адгезионного соединения на нормальный отрыв двух цилиндрических дисков

Правообладатель: ***федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Донской государственный технический университет» (ДГТУ) (RU)***

Авторы: ***Литвинов Степан Викторович (RU), Дудник Анастасия Евгеньевна (RU), Аваков Артур Артурович (RU), Труш Любовь Ивановна (RU)***

Заявка № **2018614101**

Дата поступления **24 апреля 2018 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 июня 2018 г.***

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок А.1 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2018616951 от 09 июня 2018 г.

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020660684

Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения

Правообладатель: ***Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова» (КБГУ) (RU)***

Авторы: ***Хаширова Светлана Юрьевна (RU), Лесняк Любовь Ивановна (RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Языев Сердар Батырович (RU), Языев Батыр Меретович (RU), Молоканов Георгий Олегович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)***

Заявка № **2020617798**

Дата поступления **27 июля 2020 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ ***09 сентября 2020 г.***

Руководитель Федеральной службы по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев

Рисунок А.2 — Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2020660684 от 09 сентября 2020 г.

Глава Б. Внедрение результатов диссертации

Руководитель строительного отдела ГК АКСстрой
Индивидуальный предприниматель Акопяна В.Ф.
346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;
тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakop@mail.ru.
моб. тел.: 8-908-506-97-99
ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель строительного отдела
ГК АКСстрой ИП Акопян В.Ф.
09.06.2021 г.
_____ / В. Ф. Акопян

Технический акт внедрения

результатов диссертационной работы Лесняк Любови Ивановны на тему: «Моделирование гетерогенных термических процессов в полимерах и композитах на их основе под действием инерционных сил» на соискание ученой степени кандидата технических наук

Место внедрения:	Ростовская обл., г. Аксай
Предмет внедрения:	Пакет прикладных программ для расчета и оценки остаточных напряжений в полимерных оболочках, а также определение их фактических физико-механических свойств
Результаты внедрения:	Результаты диссертационной работы Л. И. Лесняк используются при расчете и прогнозировании напряжённо-деформированного состояния полимерных оболочек, используемых в качестве опалубки при изготовлении винтовых свай. Полимерные оболочки подвергаются переменному температурному полю с целью снижения их физико-механических параметров в процессе формирования. Также используется методика для оценки фактических физико-механических параметров готового изделия. Учёт теоретических изысканий позволил внести корректировки в технологию изготовления оболочек, в результате чего экономия составила до 2 000 тыс. руб. (два миллиона рублей).

Представители заказчика:
Руководитель строительного отдела
ГК АКСстрой ИП Акопян В.Ф.
_____ / В. Ф. Акопян
09.06.2021 г.

Исполнитель: соискатель кафедры сопротивления материалов ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет»
_____ / Л. И. Лесняк

Рисунок Б.1 — Внедрение результатов диссертации в ГК АКСстрой