

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Донской государственный технический университет»

На правах рукописи

Савченко Андрей Андреевич

**МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И
ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ
ХАРАКТЕРИСТИК ПЛАСТИН ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ И
КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

02.00.06 — Высокомолекулярные соединения

Диссертация

на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.т.н., профессор Б. М. Языев

Ростов-на-Дону — 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Состояние вопроса. Постановка задачи	10
1.1 Применения пластин и оболочек из полимеров в строительной отрасли 10	
1.2 Состояние вопроса в области расчета полимерных тонкостенных конструкций.....	14
1.3 Основные теории ползучести полимерных материалов	17
Глава 2. Расчет изотропных полимерных пластин.....	21
2.1 Изгиб полимерных пластин с учетом ползучести: вывод разрешающих уравнений.....	21
2.2 Применение метода конечных элементов при расчете полимерных пластин на изгиб.....	25
2.3 Расчет полимерных пластинок при помощи двойных тригонометрических рядов	33
2.4 Осесимметричный изгиб круглых пластин	36
2.5 Плоское напряженное состояние полимерных пластин в условиях вязкоупругости	44
2.6 Расчет концентрации напряжений при растяжении пластинки из ПММА с отверстием.....	46
2.7 Выводы по главе.....	54
Глава 3. Моделирование напряженно-деформированного состояния пластин из армированных полимеров.....	55
3.1 Изгиб ортотропной пластинки: вывод разрешающих уравнений	55
3.2 Расчет на изгиб пластинки из стеклопластика ВПС-48/120.....	57
3.3 Плоская задача для ортотропной вязкоупругой пластины.....	66

3.4 Выводы по главе.....	72
Глава 4. Расчет трехслойных пластин с легким ПОЛИМЕРНЫМ заполнителем.....	73
4.1 Определение реологических параметров жесткого пенополиуретана при сдвиговой ползучести	73
4.2 Расчет на ползучесть трехслойной балки с средним слоем из пенополиуретана	78
4.3 Вывод разрешающих уравнений для трехслойных пластин	83
4.4 Конечно-элементное моделирование ползучести трехслойных пластин	88
4.5 Выводы по главе.....	100
Заключение.....	101
Список литературы.....	103
Приложение 1. Программы расчета на ЭВМ	110
Приложение 2. Внедрение результатов диссертационной работы.....	144

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В настоящее время полимерные тонкостенные конструкции находят все более широкое применение в таких отраслях, как строительство, автомобилестроение, кораблестроение, авиастроение и др. Полимерные композиционные материалы сочетают в себе высокую несущую способность, легкость и экономичность. Эти свойства в полной мере реализуются в конструкциях в виде пластин и оболочек.

Для всех полимерных материалов характерно развитие деформаций во времени при постоянных нагрузках (явление ползучести, обусловленное высокоэластическими деформациями). Ползучесть полимеров оказывает двойственное влияние на напряженно-деформированное состояние (НДС) и длительную прочность изделий и конструкций из полимерных композиционных материалов. К негативным эффектам ползучести относится значительный рост перемещений полимерных конструкций и их элементов во времени. Реология может положительно влиять на НДС полимерных элементов, так как при постоянных деформациях происходит релаксация напряжений. В композиционных материалах возможно перераспределение напряжений между полимерной матрицей и армирующими элементами.

Прогнозирование поведения конструкций из полимерных материалов и их элементов во времени, в том числе явления ползучести, является актуальной задачей, которой посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных ученых.

Степень разработанности проблемы. Общая теория ползучести и ее приложения к расчету тонкостенных конструкций рассматривались Ю. Н. Работновым, Л. М. Качановым, И. Г. Терегуловым, А. Р. Ржаницыным и др. Вопросам реологического расчета полимерных пластин и оболочек посвящены работы А. Л. Рабиновича, И. И. Гольденבלата, В. И. Климанова, С. А. Тимашева, В. И. Андреева, А. С. Чепурненко, Б. М. Языева и др. В большинстве работ при решении задач используются строго определенные законы ползучести, как правило

упрощенные и не позволяющие учитывать нелинейную составляющую деформаций ползучести и специфику конкретных полимеров.

Цель работы: разработка и совершенствование методики расчета на ползучесть пластин из полимерных и композитных материалов, а также трехслойных пластин с полимерным наполнителем в нелинейной постановке.

Объект исследования: пластины из изотропных полимеров (полиметилметакрилат, вторичный поливинилхлорид, ЭДТ-10), стеклопластиковые пластины (на примере стеклопластика ВПС-48/120), трехслойные сэндвич-панели с пенополиуретановым наполнителем.

Задачи исследования:

- получение универсальных разрешающих уравнений для случая изгиба и плоского напряженного состояния изотропных полимерных пластин;
- теоретическое исследование ползучести полимерных пластин при изгибе и растяжении с учетом концентрации напряжений на примере конструкций из полиметилметакрилата и вторичного поливинилхлорида;
- вывод разрешающих уравнений и разработка универсальной методики расчета на ползучесть пластин из армированных полимеров с учетом анизотропии материала;
- исследование влияния анизотропии упругих и реологических свойств на напряженно-деформированное состояние стеклопластиковых пластин при растяжении и изгибе на примере стеклопластика ВПС-48/120;
- экспериментальное определение реологических констант пенополиуретана из испытаний на сдвиговую ползучесть;
- разработка универсальной методики расчета и теоретическое исследование ползучести трехслойных пластин с полимерным вязкоупругим наполнителем (на примере пенополиуретана).

Научная новизна работы:

– разработана универсальная методика конечно-элементного моделирования ползучести пластин произвольной формы при изгибе и в случае плоского напряженного состояния;

– исследовано явление концентрации напряжений при растяжении полимерной полосы с отверстием с учетом нелинейной ползучести на примере полиметилметакрилата;

– в результате экспериментального исследования определены упругие и реологические параметры пенополиуретана при сдвиговой ползучести;

– исследована нелинейная ползучесть трехслойных балок и пластин с пенополиуретановым наполнителем с использованием уравнения Максвелла-Гуревича, а также уравнения Максвелла-Томпсона.

Теоретическая значимость работы:

– в результате теоретического исследования ползучести полимерных изотропных пластин на примере полиметилметакрилата, поливинилхлорида и ЭДТ-10 установлено, что при изгибе напряжения в пластинах практически не меняются, а в случае плоской задачи в конце процесса ползучести происходит возврат к упругому распределению напряжений;

– для анизотропных пластин на примере стеклопластика марки ВПС-48/120 выявлено перераспределение внутренних усилий и напряжений при ползучести;

– установлено, что нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича по сравнению с другими широко используемыми в литературе законами ползучести более точно описывает кривые сдвиговой ползучести пенополиуретана;

– в результате теоретического исследования ползучести трехслойных пластин с пенополиуретановым наполнителем установлено, что напряжения и деформации в обшивках и наполнителе по нелинейной теории, в отличие от линейной, изменяются во времени.

Практическое значение работы: разработан универсальный пакет прикладных программ в среде Matlab для расчета однослойных и трехслойных пластин, позволяющий использовать произвольные законы ползучести.

Методы исследования. Исследование базируются на современных методах теории упругости, пластичности и ползучести. Используется численное моделирование на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов. Вычисления проводились на базе современных ПЭВМ с использованием математического пакета MatLab. Выполнялось сравнение результатов с решением в программном комплексе ЛИРА-САПР.

Основные положения, выносимые на защиту:

– основные разрешающие уравнения и методики расчета полимерных и композитных пластин с учетом нелинейной ползучести;

– результаты теоретического исследования ползучести полимерных пластин на основе полиметилметакрилата, вторичного поливинилхлорида при растяжении и изгибе;

– методика и результаты обработки кривых ползучести пенополиуретана при сдвиге;

– основные разрешающие уравнения и методики расчета с учетом ползучести трехслойных балок и пластин с полимерным наполнителем;

– результаты теоретического исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных балок и пластин с пенополиуретановым наполнителем при ползучести.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

– проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;

– сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;

– сравнением результатов с решениями в МКЭ комплексах;

– применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

Внедрение результатов работы. Разработанный пакет прикладных программ в среде Matlab внедрен в группу компаний АКССстрой (г. Аксай).

Апробация работы. Результаты исследования докладывались на международных научно-практических конференциях ICMTMTE 2017 (г. Севастополь), «Пром-Инжиниринг – 2016» (г. Челябинск), научно-практической конференции «Строительство и архитектура – 2017» (г. Ростов-на-Дону), XIV Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» (г. Нальчик, 2018).

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Изложена на 145 страницах машинописного текста и содержит 65 рисунков и 4 таблицы.

Основное содержание работы.

Во введении обоснована актуальность проблемы и выбор направления исследования, сформулированы цели и задачи, основные положения, приведена краткая аннотация всех глав работы.

В главе 1 приведен обзор областей применения полимерных пластин и оболочек в строительстве, рассмотрено современное состояние вопроса в области расчета, а также изложены основные теории ползучести полимерных материалов.

В главе 2 приводится вывод разрешающих уравнений для расчета изотропных полимерных пластин с учетом ползучести, рассматривается методика конечно-элементного моделирования ползучести пластин произвольной формы. Приводится решение задач ползучести пластин из вторичного ПВХ при изгибе, а также задача растяжения полосы с отверстием из ПММА. В двумерной и трехмерной постановке рассматриваются задачи осесимметричного изгиба круглых пластин из ЭДТ-10.

В главе 3 рассмотрены вопросы реологического расчета пластин из армированных полимеров. Приведены универсальные разрешающие уравнения и решение задачи изгиба при ползучести ортотропной пластинки из стеклопластика

ВПС-48/120 на основе расплавленного эпоксидного связующего, а также рассмотрен случай плоского напряженного состояния полосы с отверстием из того же материала.

Глава 4 посвящена вопросам расчета с учетом ползучести трехслойных конструкций. Приводится методика обработки кривых ползучести полимеров при сдвиге. Рассматриваются задачи изгиба трехслойных балок и пластин с средним слоем из жесткого двухкомпонентного пенополиуретана с использованием нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1 Применения пластин и оболочек из полимеров в строительной отрасли

Строительство является одной из основных областей применения полимерных материалов. Листовые материалы из полимеров широко используются в качестве заполнения световых проемов, при производстве стеклопакетов, сооружении оранжерей, теплиц, в качестве наружного ограждения балконов и лоджий и т.д. Наибольшей популярностью на современном отечественном рынке листовых полимеров пользуются листовые стекла из полиметилметакрилата (оргстекла). По сравнению с другими прозрачными полимерами (полиэтилентерефталатом, полистиролом и поликарбонатом) оргстекло характеризуется большей светопропускающей способностью и стойкостью к солнечному излучению, а также изменениям температуры и влажности окружающей среды [1]. Также полиметилметакрилат превосходит многие другие полимеры по температурному диапазону эксплуатации, составляющему от $-40\text{ }^{\circ}\text{C}$ до $+80\div 90\text{ }^{\circ}\text{C}$.

По технологии изготовления оргстекло подразделяется на литьевое и экструзионное. Внешне эти разновидности практически ничем не отличаются, однако имеются существенные различия в их молекулярном строении, что определяет различную сферу их применения.

При производстве оргстекла экструзионным методом процесс выполняется в два этапа. Первый этап – изготовление путем полимеризации полуфабриката, который представляет собой гранулированный полимер. Далее производится процесс загрузки полученного полуфабриката в экструдер, где он под действием нагрева переходит в вязко-текучее состояние. Затем происходит процесс профилирования и выдавливания вязко-текучего полимера, форма профиля термопласта фиксируется при охлаждении до твердого состояния.

Экструзионный метод характеризуется более высокой производительностью и меньшими финансовыми затратами по сравнению с литьевым. Каждый из

используемых в строительстве видов оргстекла имеет свои достоинства и недостатки. Для литьевого стекла характерна бóльшая прочность, термо- и химическая стойкость, оно легче обрабатывается, формуется, полируется. Указанные факторы определяют использование оргстекла, полученного литьевым методом, в возведении ответственных конструкций, таких как колонны, купола и атриумы. Экструзионное оргстекло, по сравнению с литьевым, обрабатывается хуже в связи с наличием остаточных напряжений, возникающих в процессе изготовления. Преимуществом оргстекла, изготовленного экструзионным методом, является возможность получения продукции практически неограниченных размеров (длина изделий может достигать 12 метров). Также для экструзионного оргстекла характерна более высокая стабильность толщины.

Ярким примером применения оргстекла в покрытиях сооружений является построенный к Олимпиаде 1972 г. под руководством Ф. Отто Олимпийский комплекс в г. Мюнхен (рис. 1.1). В соответствии с действовавшими тогда нормами передачи цветных телевизионных изображений для крыши был разработан «плексиглас-215» толщиной 7 мм, отличающийся долговечностью, прочностью и огнестойкостью, а также большой ударной вязкостью [2]. При пожаре он давал усадку, пропуская тепло и дым, и считался практически невозгораемым. Каждый лист размером 3х3 м весил 42,5 кг и крепился на вантовой сетке в 9 точках-импостах. Листы монтировались в рамках из алюминиевого сплава (8500 листов весили 360 т) и стыковались между собой посредством жестких и водонепроницаемых прокладок из неопрена [3]. Рассчитывалось покрытие на минимальный срок службы 10 лет. По прошествии 45 лет Олимпийский парк по-прежнему является крупной площадкой для различных культурных, общественных и религиозных мероприятий.

В настоящее время в качестве материала для мембранных конструкций часто выступают фторполимеры. Первоначально они широко применялись только в таких отраслях, как химическая, автомобильная, авиационно-космическая, электронная, медицинская и нефтеперерабатывающая промышленность. Уникальными свойствами по несущей способности и прочности обладают

материалы из стекловолокна на основе этилентетрафторидэтилена (ETFE) [4]. Данные материалы могут быть полупрозрачными и хорошо рассеивать свет.

Примером использования панелей ETFE служит построенный также в Мюнхене стадион «Альянц Арена» (рис. 1.2). В 2004 году данный стадион попал в список пяти самых пожаробезопасных зданий, поскольку полимер ETFE является негорючим.



Рис. 1.1 – Олимпийский парк в Мюнхене



Рис. 1.2 – Стадион «Альянц Арена»

В сфере разработки различных полимерных листовых материалов в последнее время наблюдается резкий скачок. Одним из новых направлений является полимерная солнцезащита. В НИИСФ РААСН предложен способ экструзионного получения, а также конструкция эффективных солнцезащитных монолитных листов из светопрозрачных полимеров, в том числе и из полиметилметакрилата [5]. В работе [6] приводится технология получения и конструкция двустеночного солнцезащитного профильного листа из поликарбоната. Перспективным направлением в области создания солнцезащитных ограждений из полимеров также является разработка наборного триплексного стекла [7].

В статье [8] приводится сравнение характеристик прозрачных кровельных материалов из полимеров, включая сотовый поликарбонат, поливинилхлоридное стекло, акриловое стекло и армированный стекловолокном полиэстер. Авторы приходят к заключению, что последний из перечисленных материалов по экологичности, ценовой политике, технологическим особенностям устройства кровель является наиболее оптимальным.

Широко применяются в строительстве трехслойные панели, внешние слои которых выполнены из материала с высокими физико-механическими характеристиками, а средний слой представляет собой легкий наполнитель. Такие панели сочетают в себе высокую прочность и жесткость при малом весе, а также высокие показатели тепло и звукоизоляции.

В качестве наполнителя трехслойных панелей широко применяются пенополиуретаны (ППУ). Большим достоинством ППУ является одностадийный процесс получения изделий методом напыления или заливки. Вспенивание и отвердевание пенополиуретана происходит без дополнительного подогрева в результате экзотермической реакции синтеза, протекающей при смешении двух, трех или четырех жидких компонентов, с одновременным сцеплением пенопласта с обшивками. ППУ имеют хорошую адгезию ко многим материалам, в том числе к алюминию, стали и некоторым пластикам, используемым в качестве материала несущих слоев [9]. Кроме того, отличительным особенностям пенополиуретанов

относится максимальная экономия энергии за счет изоляции без стыков и низкого коэффициента теплопроводности, высокая тепло- и морозостойкость (от -180 до $+160$ °C), устойчивость к воздействию микроорганизмов и агрессивных сред, надежная антикоррозионная защита металлических поверхностей, трудногорючесть, высокие прочностные характеристики, значительный рабочий ресурс (20–25 лет).

Общепризнанным является факт небольшого роста коэффициента теплопроводности в течение первых 6–7 лет эксплуатации ППУ. Широкое применение жестких ППУ позволяет достичь уровня современных требований российских и зарубежных норм [10, 11].

Как и для любого другого полимера, для пенополиуретана помимо упругих свойств характерно наличие вязкоупругости, поэтому для адекватного описания напряженно-деформированного состояния сэндвич панелей из ППУ необходимо привлечение аппарата теории ползучести.

В большинстве случаев облицовочные слои трехслойных панелей выполняются из холоднокатанной оцинкованной стали с покрытием в виде полимерной пленки. В работах [12, 13] рассматривается возможность использования в качестве несущих слоев базальтопластика, а также введения в конструкцию ППУ базальтовых нитей, равномерно распределенных по объему заполнителя.

1.2 Состояние вопроса в области расчета полимерных тонкостенных конструкций

Основы теории расчета пластин и оболочек были заложены такими отечественными учеными, как И. Г. Бубнов, Б. Г. Галеркин, С. П. Тимошенко, Э. И. Григолюк, А. Я. Александров и др. Теория анизотропных пластин и оболочек была разработана С. А. Амбарцумяном [14] и С. Г. Лехницким [15, 16].

Пластинки большого прогиба исследовались в работах П. Ф. Папковича [17], В. В. Болотина [18], В. З. Власова [19], К. З. Галимова [20], А. С. Вольмира [21], Х. М. Муштари [22], В. И. Феодосьева [23] и др.

Общие основы теории ползучести, а также вопросы ее применения к расчету пластин и оболочек разрабатывались Л. М. Качановым [24], Ю. Н. Работновым [25], А. Р. Ржаницыным [26], В. Д. Харлабом и др.

Широкие возможности для исследования напряженно-деформированного состояния тонкостенных конструкций открывает метод конечных элементов (МКЭ). Основы МКЭ, а также вопросы расчета методом конечных элементов пластин и оболочек рассматриваются в работах [27, 28, 29, 30, 31].

С использованием МКЭ связано большинство работ, опубликованных по теме диссертационного исследования в последние годы. Так, в работе [32] исследуется концентрация напряжений вблизи отверстия в образцах из хаотически армированного стеклопластика. Расчет выполняется при помощи программного комплекса ANSYS только в упругой постановке. В статье [33] проводится экспериментальное и численное исследование напряженно-деформированного состояния круглой пластины из эпоксидной смолы ЭД-20 при неравномерном охлаждении. Для конечно-элементного моделирования также используется комплекс ANSYS. Термомеханическое поведение материала образца описывается упрощенной моделью упругого приближения, которая была предложена авторами ранее в статье [34].

В работе [35] приводится методика экспериментального определения модуля упругости полимерных материалов, а также предлагается решение задачи расчета деформаций и напряжений в нагруженной консольной пластине методом конечных элементов. Реологические свойства материала при этом не учитываются.

В статье [36] излагаются результаты экспериментальных исследований по измерениям деформаций образцов из полимерных композиционных материалов при помощи встроенных в материал волоконно-оптических датчиков деформаций. В качестве образцов для испытаний выступают сплошные прямоугольные пластины и прямоугольные пластины с вырезами в форме «бабочки». Выполняется

сравнение результатов измерения градиентных полей деформаций в пластинах с вырезами с численными решениями на основе метода конечных элементов.

Работа [37] посвящена конечно-элементному моделированию соединений элементов из полимерных композиционных материалов (ПКМ). Предлагаются способы повышения несущей способности механических точечных соединений ПКМ.

В работе [38] рассматривается решение задачи оптимизации геометрических параметров трехслойной пластины при помощи метода конечных элементов. В качестве варьируемых параметров выступают толщины слоев. Для оптимизации используется модуль Design Opt пакета ANSYS.

Численная реализация нелинейной потери устойчивости сэндвич-панелей из полимерных композиционных материалов на основе МКЭ рассматривается в работе [39]. Исследуется влияние свойств заполнителя на формы потери устойчивости и величину критических нагрузок. Результаты сопоставляются с аналитическими решениями.

В работе [40] приводится расчет квадратных трехслойных пластин с анизотропными несущими слоями на действие синусоидальной нагрузки.

В статье [41] рассматривается задача осесимметричного изгиба трехслойных пластин с учетом нелинейно-упругих свойств заполнителя. Решение выполняется аналитически, а также при помощи метода конечных элементов. Ползучесть заполнителя при расчете не учитывается.

Расчету трехслойных конструкций с учетом ползучести посвящены публикации научного руководителя автора, а также академика РААСН В. И. Андреева и проф. Б. М. Языева [42, 43, 44, 45]. В статье [45] приводится приближенная методика расчета трехслойных пластин при помощи МКЭ. Сущность этой методики состоит в том, что вводится допущение о недеформируемости несущих слоев. Этот случай является тривиальным и предполагает отсутствие сцепления обшивок с заполнителем. В настоящей диссертации будут получены уравнения для прямоугольного конечного элемента без использования данного допущения. Кроме того, в работах [42, 43, 44, 45] для

трехслойных конструкций используется линейная теория наследственности. Автором для исследования напряженно-деформированного состояния трехслойных конструкций будет применено нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича.

1.3 Основные теории ползучести полимерных материалов

Теория старения. Согласно данной теории напряжение, деформация и время связаны конечной зависимостью [46]:

$$\varepsilon^* = f(\sigma, t). \quad (1.1)$$

Большим удобством теории старения заключается в ее крайняя простота.

При использовании данной теории нет необходимости задаваться каким-либо аналитическим выражением для функции $f(\sigma, t)$. Для расчетов можно использовать непосредственно кривые ползучести, построенные, например, в обычных координатах «деформация ε^* – время t » (при $\sigma = \text{const}$). С другой стороны, применение данной теории при сложных режимах нагружения может привести к противоречивым результатам.

Теория течения. В соответствии с теорией течения между напряжением, деформацией ползучести и временем устанавливается следующая связь:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma, t). \quad (1.2)$$

Экспериментальные исследования показывают, что в некоторых случаях результаты оказываются удовлетворительными, в других — существенно неверными. По сравнению с экспериментальными данными теория течения приводит систематическому занижению скорости ползучести после ступенчатого увеличения нагрузки [46].

Теория упрочнения. Основное определяющее уравнение теории имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma, \varepsilon^*). \quad (1.3)$$

Широко используемое в литературе линейное уравнение Максвелла-Томпсона можно считать частным случаем теории упрочнения. Скорость роста деформации ползучести для закона Максвелла-Томпсона записывается в виде [47]:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left(\left(1 - \frac{H}{E} \right) \sigma - H \varepsilon^* \right), \quad (1.4)$$

где n – время релаксации, E и H – соответственно мгновенный и длительный модуль упругости.

Также для полимеров широко применяется нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, в котором вязкость экспоненциально зависит от напряжения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} &= \frac{f^*}{\eta^*}; \\ f^* &= \sigma - E_\infty \varepsilon^*; \\ \eta^* &= \eta_0^* e^{-\frac{|f^*|}{m^*}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где E_∞ – модуль высокоэластичности, η_0^* – начальная релаксационная вязкость, m^* – модуль скорости, f^* – функция напряжений.

Если следовать общепринятой классификации, то уравнение Максвелла-Гуревича также является частным случаем теории упрочнения.

Наследственные теории ползучести. Линейная теория наследственности. Линейная теория наследственности основана на принципе суперпозиции деформаций. Простейший вариант данной теории был предложен Л. Больцманом. Деформация ползучести в момент времени t определяется следующим образом:

$$\varepsilon^*(t) = \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.6)$$

Деформации наследственной ползучести после разгрузки являются полностью обратимыми. Данное явление получило название упругого последействия.

Для использования уравнения (1.6) необходимо иметь в явном виде зависимость для ядра ползучести $K(t - \tau)$. Больцманом было предложено выражение для ядра ползучести в виде:

$$K(t - \tau) = \frac{C}{t - \tau}, \quad (1.7)$$

где $C > 0$ – некоторая постоянная, зависящая от материала.

Данное ядро имеет особенность, заключающуюся в том, что в начальный момент времени скорость деформации равна бесконечности, и интеграл (1.6) расходится. Ядра, которые имеют особенность в точке $t = \tau$, называются сингулярными.

К другим сингулярным ядрам, используемым в расчетной практике, относятся, например, предложенное А. Р. Ржаницыным [26] ядро

$$K(t - \tau) = \frac{C \exp[-\beta(t - \tau)]}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (1.8)$$

или следующее ядро, предложенное Г. Л. Слонимским [48, 49]:

$$K(t - \tau) = \frac{C \exp[-(t - \tau)^{1-\alpha}]}{(t - \tau)^\alpha}, \quad (1.9)$$

где $0 < \alpha < 1, \beta > 0, C > 0$ – константы материала.

Помимо сингулярных ядер в линейной теории наследственности применяются и несингулярные, например, сумма экспоненциальных функций:

$$K(t - \tau) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}, \quad (1.10)$$

где $\alpha_k > 0$ и $\lambda_k > 0$ – постоянные материала.

Ядро (1.10) позволяет перейти от интегральной формы закона ползучести к дифференциальной.

К несингулярным ядрам относится ядро Абеля:

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha}, C > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (1.11)$$

Ю. Н. Работновым [25, 50] было предложено дробно-экспоненциальное ядро:

$$K(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (1.12)$$

где $\Gamma(1 + \alpha)$ – гамма-функция.

Рассмотренные выше законы ползучести записаны для одноосного напряженного состояния и могут быть применены только в случае простейших видов деформации стержней (растяжение-сжатие, изгиб). Для более сложных задач необходимо выполнить переход от одноосного к объемному напряженному состоянию. При переходе часто постулируется применимость основных гипотез теории пластичности.

Одной из основных рабочих гипотез является равенство нулю объемной деформации ползучести $\theta^* = \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* + \varepsilon_z^*$. Гипотеза о несжимаемости материала при ползучести часто дополняется более сильным предположением о том, что первый инвариант тензора напряжений не влияет на ползучесть [51, 52]. Влиянием третьего инварианта также обычно пренебрегают. В работах [53, 54] выполняется сравнение результатов, получаемых с использованием гипотезы о несжимаемости материала при ползучести, а также при $\theta^* \neq 0$ на примере полимерного цилиндра, находящегося в условиях плоского деформированного состояния. Устанавливается, что разница в напряжениях при этом может достигать 30% и более.

В настоящей диссертации в ряде задач будет использоваться обобщенное на случай трехосного напряженного состояния Г. И. Гуревичем [55] нелинейное уравнение Максвелла. Указанное уравнение в общем виде будет приведено в параграфе 2.2.

ГЛАВА 2. РАСЧЕТ ИЗОТРОПНЫХ ПОЛИМЕРНЫХ ПЛАСТИН

2.1 Изгиб полимерных пластин с учетом ползучести: вывод разрешающих уравнений

При выводе разрешающих уравнений будем рассматривать тонкие жесткие пластины, для которых справедлива теория Кирхгофа-Лява. Толщина пластин заключена в пределах:

$$\left(\frac{1}{80} \div \frac{1}{100}\right) \leq \frac{h}{a} \leq \left(\frac{1}{5} \div \frac{1}{8}\right),$$

где a – наименьший размер пластины в плане.

Исходя из гипотезы прямой нормали, деформации пластины определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Равновесие элемента пластины показано на рис. 2.1. Уравнения равновесия записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= -q; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} &= Q_x; \\ \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} &= Q_y. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Исключим из уравнений (2.1) и (2.2) поперечные силы:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q. \quad (2.3)$$

Связь между деформациями и напряжениями с учетом ползучести для изотропного материала записывается в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \varepsilon_x^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \varepsilon_y^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + \gamma_{xy}^*.\end{aligned}\tag{2.4}$$

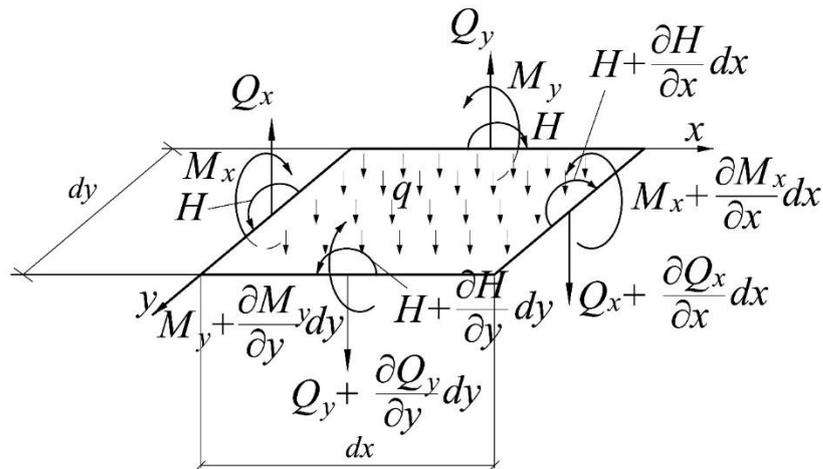


Рис. 2.1 – Равновесие элемента пластины

Выразим из (2.4) напряжения через деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y - (\varepsilon_x^* + \nu\varepsilon_y^*)) \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2}\left[z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \varepsilon_x^* + \nu\varepsilon_y^*\right]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x - (\varepsilon_x^* + \nu\varepsilon_y^*)) \\ &= -\frac{E}{1-\nu^2}\left[z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \varepsilon_y^* + \nu\varepsilon_x^*\right]; \\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*) = -\frac{E}{2(1+\nu)}\left(2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} + \gamma_{xy}^*\right).\end{aligned}\tag{2.5}$$

Изгибающие моменты M_x и M_y и крутящий момент H вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_x^*; \\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_y^*; \\
H &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - H^*,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость,

$$\begin{aligned}
M_x^* &= \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*) z dz; \\
M_y^* &= \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) z dz; \\
H^* &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xy}^* z dz.
\end{aligned}$$

Подставив (2.6) в (2.3), получим основное разрешающее уравнение:

$$D \nabla^4 w = q - \left(\frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right), \tag{2.7}$$

где $\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$ – двойной оператор Лапласа.

Рассмотрим граничные условия для различных закреплений прямоугольной пластинки, изображенной на рис. 2.2:

1. Жесткое защемление при $x = 0$ или $x = a$. В этом случае обращается в нуль прогиб и угол поворота φ_x :

$$w = 0; \varphi_x = \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (2.8)$$

В случае жесткого защемления края $y = 0$ или $y = b$ граничные условия имеют вид:

$$w = 0; \varphi_y = \frac{\partial w}{\partial y} = 0. \quad (2.9)$$

2. Шарнирное опирание края $x = 0$ или $x = a$. На шарнирных краях обращаются в нуль прогибы и изгибающие моменты:

$$w = 0; M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_x^* = 0. \quad (2.10)$$

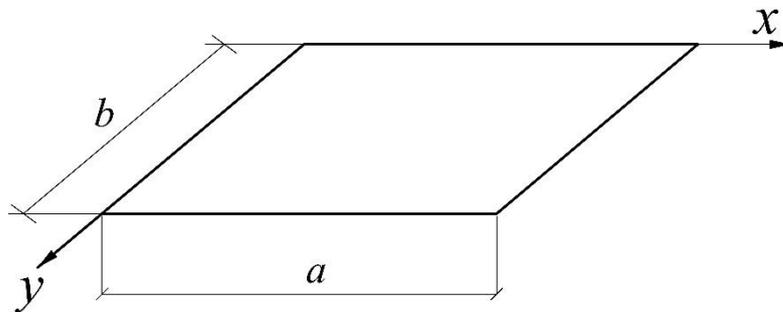


Рис. 2.2 – К формированию граничных условий

Из первого условия (2.10) следует, что производная $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ на указанных краях обращается в нуль. Величина M_x^* на шарнирных краях также равна нулю. В итоге имеем следующие граничные условия:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.11)$$

В случае шарнирного опирания краев $y = 0$ или $y = b$ граничные условия записываются в виде:

$$w = 0; \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \quad (2.12)$$

3. Свободный край. На свободном краю при $x = 0$ или $x = a$ обращаются в нуль изгибающий момент M_x , поперечная сила Q_x и крутящий момент H . Но поскольку уравнение (2.7) допускает на каждом краю не более двух граничных

условий, последние два условия объединяются и вводится приведенная поперечная сила, вычисляемая по формуле:

$$Q_x^{\text{прив}} = \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} = 0. \quad (2.13)$$

Подставив (2.6) в (2.13), получим:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial H}{\partial y} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - \frac{\partial M_x^*}{\partial x} - 2 \frac{\partial H^*}{\partial y} = 0. \quad (2.14)$$

Если от закрепления свободен край $y = 0$ или $y = b$, то на нем обращается в нуль приведенная поперечная сила Q_y :

$$Q_y^{\text{прив}} = \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (2.15)$$

Через прогиб условие (2.15) выражается следующим образом:

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial H}{\partial x} = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) - \frac{\partial M_y^*}{\partial y} - 2 \frac{\partial H^*}{\partial x} = 0. \quad (2.16)$$

2.2 Применение метода конечных элементов при расчете полимерных пластин на изгиб

В работе [42] приводится вывод уравнений МКЭ с учетом ползучести для прямоугольного конечного элемента. В данном параграфе будут получены уравнения для плоского треугольного конечного элемента, что позволяет рассчитывать пластины произвольной формы.

Рассматриваемый конечный элемент представлен на рис. 2.3. В каждом из его узлов имеется 3 степени свободы: прогиб w_i и 2 угла поворота φ_{ix} и φ_{iy} . Поле перемещений конечного элемента записывается в виде:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{\rho_1\} \\ \{\rho_2\} \\ \{\rho_3\} \end{Bmatrix}, \quad (2.17)$$

где

$$\{\rho_i\} = \{w_i \quad \varphi_i^x \quad \varphi_i^y\}^T = \left\{ w_i \quad -\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \quad -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \right\}^T.$$

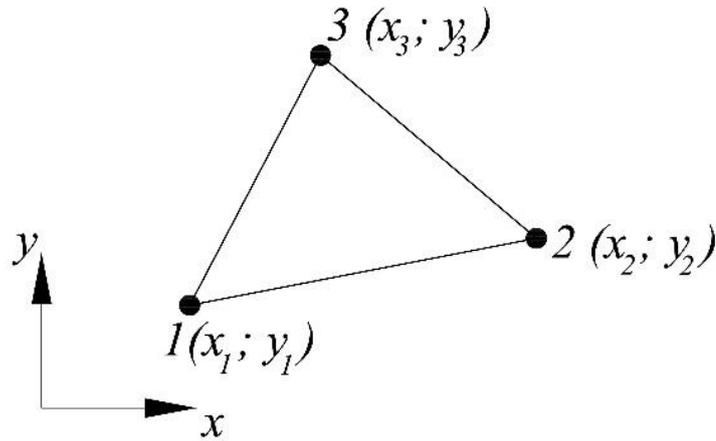


Рис. 2.3 – Треугольный конечный элемент пластины

Для функции прогиба принимается следующая аппроксимация, которая также используется в работе [29]:

$$w = \beta_1 L_1 + \beta_2 L_2 + \beta_3 L_3 + \beta_4 (L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) + \dots + \beta_9 (L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3), \quad (2.18)$$

где $\beta_{1\dots 9}$ – неопределенные коэффициенты, L_1, L_2, L_3 – L -координаты, определяемые следующим образом:

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1\dots 3, \quad (2.19)$$

где $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$ – площадь конечного элемента, $a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2$,

$$b_1 = y_2 - y_3, \quad c_1 = x_3 - x_2.$$

Остальные коэффициенты a_i, b_i, c_i определяются путем циклической замены индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. Постоянные $\beta_{1\dots 9}$ можно найти, подставив в выражение (2.18) узловые значения прогибов и углов поворота. При этом возникает необходимость дифференцирования по координатам x и y . Производные по декартовым координатам вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \left(c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Окончательно функция прогибов записывается в виде:

$$w = \{\{N_1\} \quad \{N_2\} \quad \{N_3\}\}\{U\}, \quad (2.21)$$

где $\{N_1\}$, $\{N_2\}$, $\{N_3\}$ – функции формы.

$$\{N_1\}^T = \left\{ \begin{array}{l} L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ b_3 \left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ c_3 \left(L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - c_2 \left(L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{array} \right\}. \quad (2.22)$$

Выражения для $\{N_2\}$ и $\{N_3\}$ также можно получить путем циклической замены индексов.

При выводе уравнений используется вариационный принцип Лагранжа.

Потенциальная энергия деформации пластинки определяется следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV, \quad (2.23)$$

где $\{\sigma\}^T = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$ – вектор напряжений, $\{\varepsilon^{el}\}$ – вектор упругих деформаций, которые представляют разность между полными деформациями и деформациями ползучести:

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix}. \quad (2.24)$$

Деформации связаны с напряжениями следующим образом:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}), \quad (2.25)$$

где $[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$ – матрица упругих постоянных.

Вектор полных деформаций определяется следующим образом:

$$\{\varepsilon\} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = -z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \{N\}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{N\}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{N\}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \{U\} = -z[B]\{U\}. \quad (2.26)$$

Элементы матрицы $[B]$ являются функциями от x и y . Данная матрица нами была получена в символьном виде в математическом пакете Matlab и здесь не приводится ввиду ее громоздкости.

С учетом (2.26) векторы напряжений и упругих деформаций записываются в виде:

$$\begin{aligned}\{\varepsilon^{el}\} &= -z[B]\{U\} - \{\varepsilon^*\}; \\ \{\sigma\} &= -z[D][B]\{U\} - [D]\{\varepsilon^*\}.\end{aligned}\quad (2.27)$$

Подставив (2.27) в (2.3), получим:

$$\begin{aligned}\Pi &= \frac{1}{2} \left(\int_V z^2 \{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\} [D] z [B] \{U\} dV + \right. \\ &+ \left. \int_V z \{U\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dV + \int_V \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\} dV \right) = \\ &\frac{1}{2} \{U\}^T \frac{h^3}{12} \int_A [B]^T [D] [B] dA \{U\} + \{U\}^T \int_A [B]^T [D] dA \cdot \int_{-h/2}^{h/2} \{\varepsilon^*\} z dz.\end{aligned}\quad (2.28)$$

Если на элемент действует равномерно распределенная нагрузка, то работа внешних сил записывается в виде:

$$\begin{aligned}A &= \int_A qw(x, y) dA = \{U\}^T q \int_A \begin{bmatrix} \{N_1\}^T \\ \{N_2\}^T \\ \{N_3\}^T \end{bmatrix} dA = \\ &= \{U\}^T \frac{8qA}{3} \begin{bmatrix} 1/8 \\ b_3 - b_2 \\ c_3 - c_2 \\ 1/8 \\ b_1 - b_3 \\ c_1 - c_3 \\ 1/8 \\ b_2 - b_1 \\ c_2 - c_1 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.29)$$

После минимизации полной энергии $\mathcal{E} = \Pi - A$ по узловым перемещениям задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \quad (2.30)$$

где $[K]$ – матрица жесткости, $\{F\}$ – вектор внешних узловых нагрузок, $\{F^*\}$ – вклад деформаций ползучести в вектор узловых нагрузок.

$$[K] = \frac{h^3}{12} \int_A [B]^T [D] [B] dA;$$

$$\{F^*\} = \int_A [B]^T [D] dA \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\varepsilon^*\} z dz. \quad (2.31)$$

Интегралы по площади в выражениях для $[K]$ и $\{F^*\}$ вычисляются численно. В матрицу жесткости и вектор нагрузки входят члены со степенью не выше второй, поэтому интегрирование будет точным при использовании всего лишь трех точек (середин сторон элемента) [30]. Формула интегрирования записывается в виде:

$$\int_A f(x, y) dA = \frac{A}{3} \left[f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) \right]. \quad (2.32)$$

Интегралы по толщине пластинки вычисляются методом трапеций. Расчет ведется шаговым методом, на первом шаге решается упругая задача, а далее деформации ползучести в момент времени $t + \Delta t$ определяются по формуле:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (2.33)$$

Был выполнен расчет прямоугольной шарнирно опертой по контуру пластинки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 2.4).

Материал пластинки – вторичный ПВХ, модуль упругости $E = 1480$ МПа, коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$, величина нагрузки $q = 2$ кПа, размеры пластины: $a = 0.8$ м, $b = 0.6$ м, толщина пластинки $h = 2$ см. Выбор данного полимера обусловлен тем, что вторичный ПВХ является материалом с достаточно высокими эксплуатационными свойствами. Согласно экспериментальным данным, вторичный ПВХ является более жестким, чем первичный, что касается не только модуля упругости, но и релаксационных свойств. С практической точки зрения это означает, что вторичный материал может использоваться не только для

изготовления декоративных облицовочных элементов, но и более жестких конструкций, способных выдерживать существенные напряжения не размягчаясь и не разрушаясь длительное время.

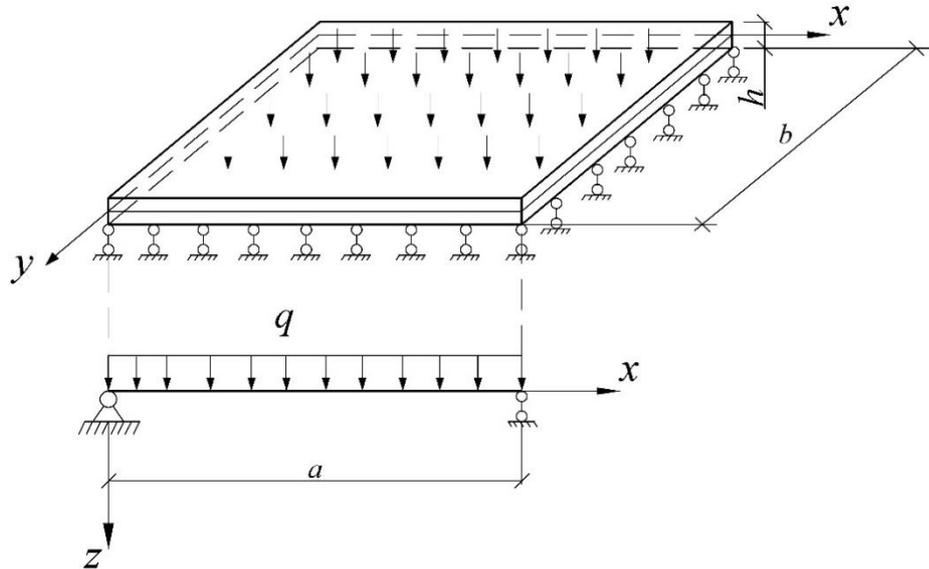


Рис. 2.4 – Расчетная схема пластинки

В качестве закона ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, которое при плоском напряженном состоянии записывается в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = x, y, \quad j = x, y,$$

где f_{ij}^* – функция напряжений, η^* – релаксационная вязкость.

$$f_{ij}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - p\delta_{ij}) - E_{\infty}\varepsilon_{ij}^*,$$

где $p = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{3}$ – среднее напряжение, δ_{ij} – символ Кронекера, E_{∞} – модуль высокоэластичности.

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|f_{\max}^*|}{m^*}\right),$$

где η_0^* – начальная релаксационная вязкость, m^* – модуль скорости.

Для сдвиговой деформации ползучести: $\gamma_{xy}^* = 2\varepsilon_{xy}^*$.

Реологические параметры ПВХ при различных температурах приводятся в работах [56, 57]. При $T = 20^\circ\text{C}$: $E_\infty = 5990$ МПа, $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$ МПа · мин, $m^* = 12.6$ МПа.

Полученный в результате график роста прогиба в центре пластины представлен на рис. 2.5. Отметим, что для пластин, материал которых подчиняется уравнению Максвелла-Гуревича, отношение прогибов при $t \rightarrow \infty$ и $t = 0$ должно быть равно:

$$\frac{w(\infty)}{w(0)} = \frac{D}{D_\infty},$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость пластинки, D_∞ – длительная цилиндрическая жесткость, впервые введенная в работе [58]:

$$D_\infty = \frac{\alpha h^3}{12(\alpha^2 - \beta^2)}, \quad (2.34)$$

где $\alpha = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}$, $\beta = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}$.

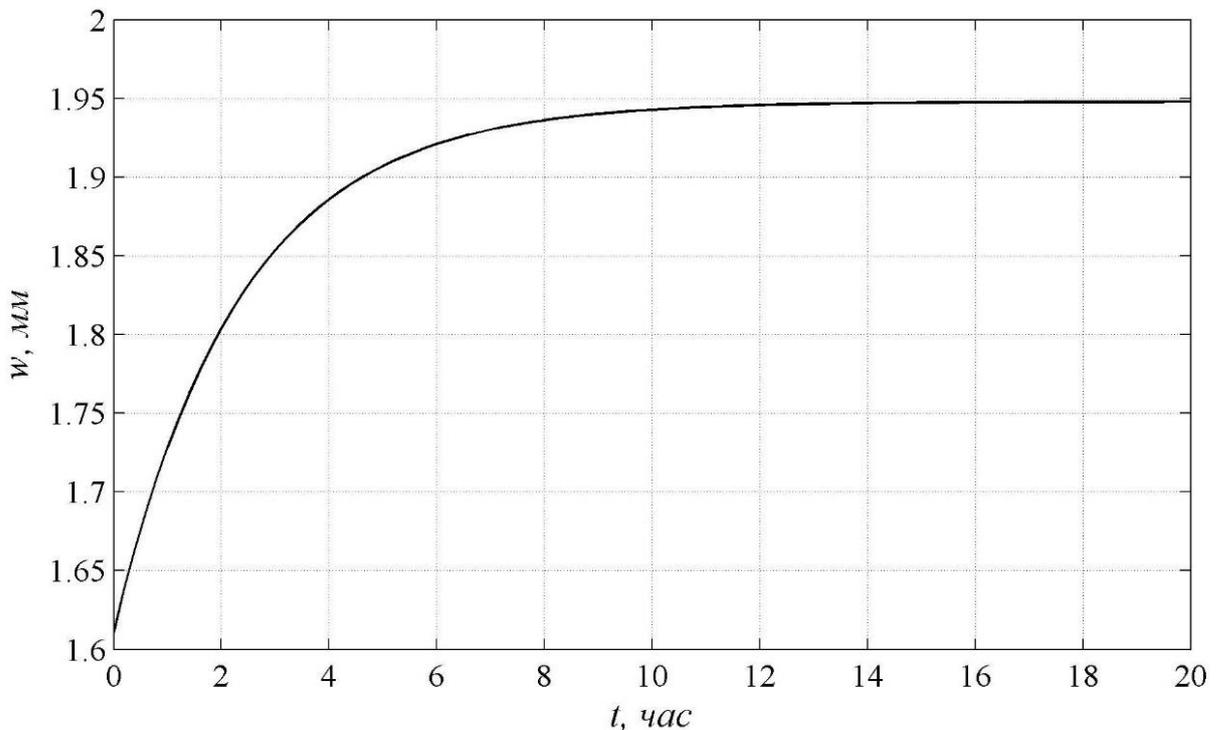


Рис. 2.5 – График роста прогиба в центре пластины

По результатам численного расчета отношение $w(\infty)/w(0)$ составило 1.2092, что отличается от точного значения на 0.26% и свидетельствует о достоверности полученных уравнений и методики.

На рис. 2.6 представлены графики изменения во времени наибольших напряжений. Напряжения σ_y выросли на 0.93%, σ_x – на 4.05 %, наибольшие касательные напряжения снизились на 6%.

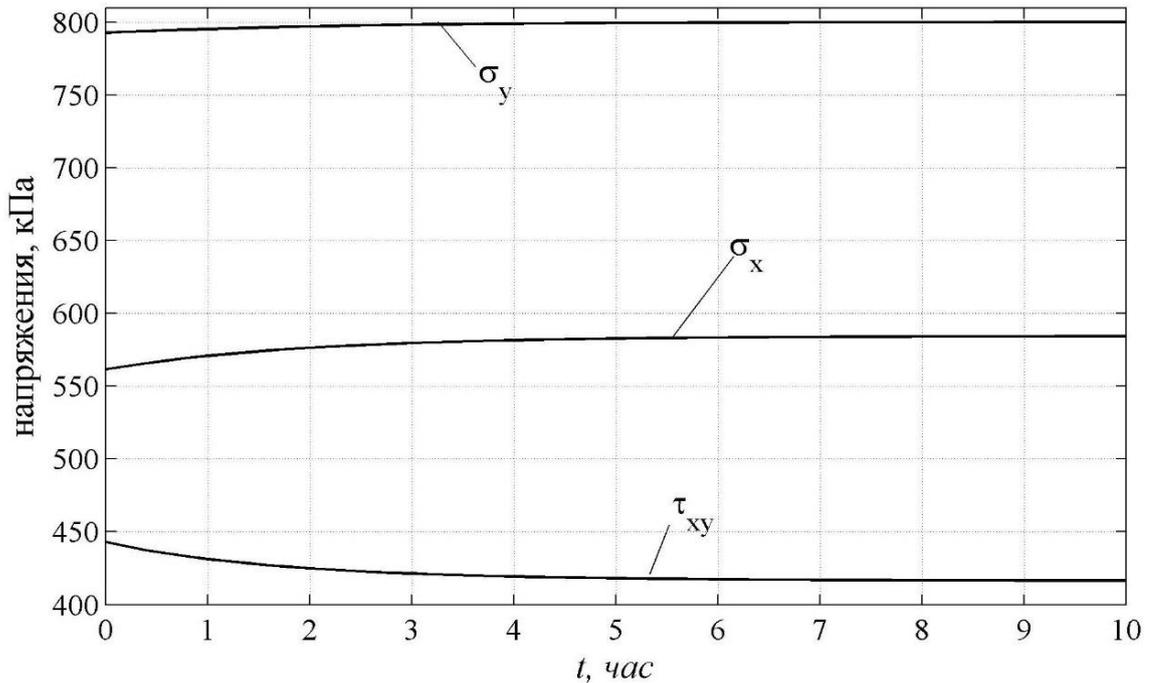


Рис. 2.6 – Изменение во времени наибольших напряжений

Рассмотрим причину изменения во времени напряжений. В конце процесса ползучести связь между линейными деформациями и напряжениями имеет вид [42]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}\right) \sigma_x - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}\right) \sigma_y = \alpha \sigma_x - \beta \sigma_y; \\ \varepsilon_y &= \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}\right) \sigma_y - \left(\frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}\right) \sigma_x = \alpha \sigma_y - \beta \sigma_x. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Введя обозначения $\tilde{E} = \frac{1}{\alpha} = \frac{EE_\infty}{E+E_\infty}$ и $\tilde{\nu} = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2E_\infty\nu+E}{2(E+E_\infty)}$, соотношения (2.35)

можно переписать в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_x - \tilde{\nu} \sigma_y); \quad \varepsilon_y = \frac{1}{\tilde{E}} (\sigma_y - \tilde{\nu} \sigma_x). \quad (2.36)$$

Величины \tilde{E} и $\tilde{\nu}$ представляют собой длительный модуль упругости и коэффициент Пуассона [59, 53].

Предельную сдвиговую деформацию ползучести можно найти из условия равенства нулю при $t \rightarrow \infty$ скорости ее роста:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{xy}^*}{\partial t} = 0 \rightarrow f_{xy}^* = \frac{3}{2} \tau_{xy} - E_{\infty} \varepsilon_{xy}^* = 0 \rightarrow \varepsilon_{xy}^* = \frac{3\tau_{xy}}{2E_{\infty}}. \\ \gamma_{xy}^* = 2\varepsilon_{xy}^* = \frac{3\tau_{xy}}{E_{\infty}} = \frac{\tau_{xy}}{G_{\infty}}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Полная сдвиговая деформация с учетом (2.37) определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + \frac{\tau_{xy}}{G_{\infty}} = \tau_{xy} \left(\frac{2(1+\nu)}{E} + \frac{3}{E_{\infty}} \right) = \tau_{xy} \frac{2E_{\infty} + 2\nu E_{\infty} + 3E}{EE_{\infty}} = \\ &= \tau_{xy} \frac{2E_{\infty}\nu + E + 2(E_{\infty} + E)}{EE_{\infty}} = \tau_{xy} \frac{2\tilde{\nu}(E + E_{\infty}) + 2(E + E_{\infty})}{EE_{\infty}} = \\ &= \tau_{xy} \frac{2(1+\tilde{\nu})(E + E_{\infty})}{EE_{\infty}} = \tau_{xy} \frac{2(1+\tilde{\nu})}{\tilde{E}}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Выражения (2.36) и (2.38) по форме совпадают с соотношениями для упругой задачи, но длительный коэффициент Пуассона отличается от мгновенного. Поскольку величина ν входит в формулы изгибающих моментов, происходит их перераспределение, и, как следствие, напряжения во времени изменяются. Для рассмотренного примера длительный коэффициент Пуассона равен 0.34.

2.3 Расчет полимерных пластинок при помощи двойных тригонометрических рядов

Для упругой шарнирно опертой по контуру пластинки имеется аналитическое решение Навье в двойных тригонометрических рядах [60]. Обобщим это решение на случай пластинки из вязкоупругого материала.

Функцию прогиба запишем в виде двойного тригонометрического ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.39)$$

Подставим (2.39) в уравнение (2.7):

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y) + q^*(x, y), \quad (2.40)$$

где

$$q^*(x, y) = - \left(\frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right).$$

Разложим функции $q(x, y)$ и $q^*(x, y)$ в ряд Фурье по синусам:

$$\begin{aligned} q(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ q^*(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Коэффициенты разложения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} q_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \\ q_{mn}^* &= \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^*(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Первый интеграл в (2.42) при некоторых вариантах нагружения может быть вычислен аналитически. Так, при $q = const$:

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q}{m\pi^2}, & \text{если } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2p + 1. \\ 0, & \text{если } m \text{ или } n - \text{ четное} \end{cases}. \quad (2.43)$$

Второй интеграл в случае произвольного закона ползучести можно вычислить только численно. Для этого вводится равномерная сетка по x и y . Если функция $q(x, y)$ раскладывается только по нечетным m и n , то в разложении функции $q^*(x, y)$ также будут присутствовать только нечетные члены.

Подставим (2.41) в (2.40):

$$\begin{aligned} \pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (q_{mn} + q_{mn}^*) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Приравнявая коэффициенты рядов в левой и правой части (2.44), получим:

$$w_{mn} = \frac{(q_{mn} + q_{mn}^*)}{\pi^4 D \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (2.45)$$

Определив функцию прогиба, можно вычислить напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^* \right] = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[z\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{\nu n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*) \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^* \right] = \\ &= \frac{E}{1-\nu^2} \left[z\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\nu m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left(2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma_{xy}^* \right) = \\ &= -\frac{E}{2(1+\nu)} \left(2z\pi^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{ab} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \gamma_{xy}^* \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

По напряжениям вычисляются скорости роста деформаций ползучести и далее высокоэластические деформации в момент времени $t + \Delta t$, а также величины M_x^* , M_y^* , H^* , q_{mn}^* .

С целью контроля правильности результатов была решена задача для прямоугольной пластинки, рассмотренной в предыдущем параграфе. На рис. 2.7 приведены графики роста прогиба при различном числе членов ряда k . Из представленных графиков видно, что при $k = 4$ ($m = 1, 3$ и $n = 1, 3$) и $k = 9$ ($m = 1, 3, 5$ и $n = 1, 3, 5$) результаты практически совпадают. Сравнение

результатов при $k = 4$ с решением, полученным на основе МКЭ приведено в табл. 2.1.

Табл. 2.1 – Сравнение прогибов в центре пластины в различные моменты времени, полученных на основе аналитического решения (w_1), с решением при помощи МКЭ (w_2)

t , час	0	1	2	3	4	5	6	7	8
w_1 , мм	1.5813	1.6981	1.7781	1.8334	1.8717	1.8984	1.9171	1.9302	1.9394
w_2 , мм	1.6109	1.7260	1.8013	1.8509	1.8836	1.9052	1.9195	1.9291	1.9354

Наибольшее расхождение результатов, полученных двумя методами, составляет 1.83%, что свидетельствует об их достоверности.

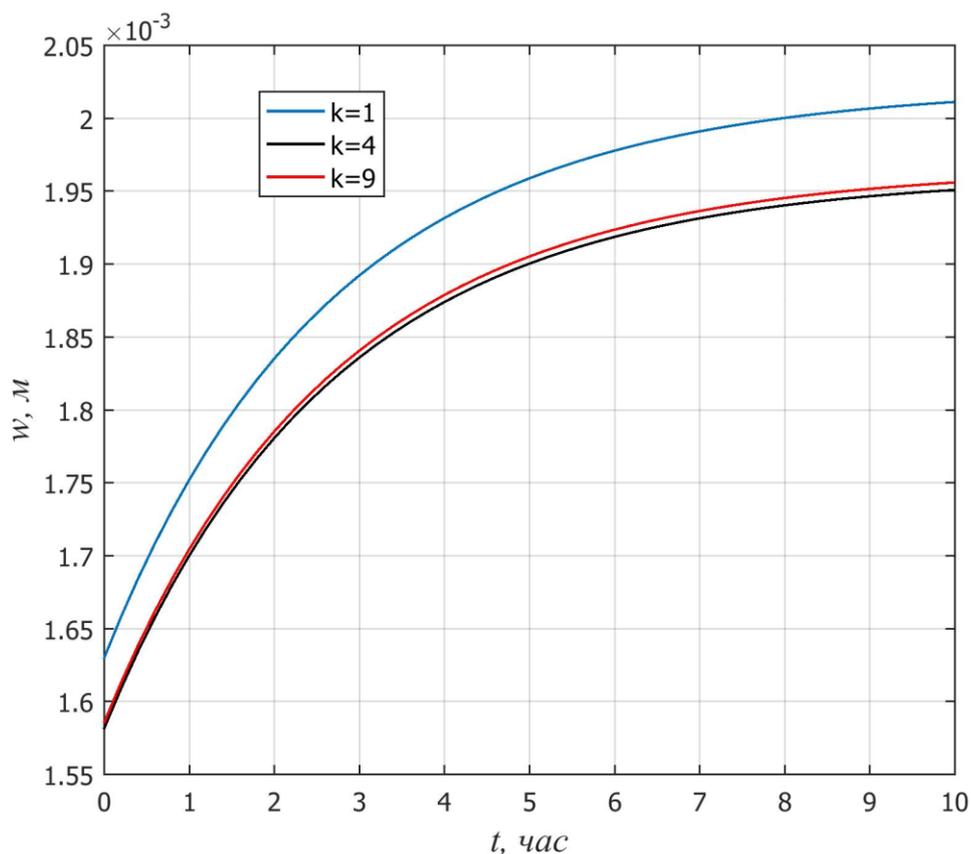


Рис. 2.7 – Графики роста прогиба при различном числе членов ряда

2.4 Осесимметричный изгиб круглых пластин

Основные уравнения для осесимметрично нагруженных круглых пластин с учетом ползучести приводятся в работах [42, 58, 61].

Связь между деформациями и перемещениями записывается в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= -z \frac{d^2 w}{dr^2}; \\ \varepsilon_\theta &= -\frac{z}{r} \frac{dw}{dr}.\end{aligned}\quad (2.47)$$

Физические соотношения в полярных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) + \varepsilon_r^*; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) + \varepsilon_\theta^*,\end{aligned}\quad (2.48)$$

Изгибающие моменты вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}M_r &= -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) - M_r^*; \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right) - M_\theta^*,\end{aligned}\quad (2.49)$$

где

$$M_r^* = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_r^* + \nu \varepsilon_\theta^*) z dz; \quad M_\theta^* = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_\theta^* + \nu \varepsilon_r^*) z dz.$$

Уравнение равновесия записывается в виде:

$$\frac{d^2 M_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \left(2 \frac{dM_r}{dr} - \frac{dM_\theta}{dr} \right) = -q. \quad (2.50)$$

Задача сводится к дифференциальному уравнению 4-го порядка относительно прогиба:

$$D \left(\frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} \right) = q - \left(\frac{d^2 M_r^*}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dM_r^*}{dr} - \frac{1}{r} \frac{dM_\theta^*}{dr} \right) \quad (2.51)$$

В работе [42] данное уравнение решается методом конечных разностей. Рассматривается круглая жестко заземленная по контуру пластинка из ЭДТ-10 (рис. 2.8). В качестве закона ползучести используется нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Расчет ведется при следующих исходных данных: $\nu = 0.3$, $q = 0.1$ кПа, $E = 3035$ МПа, $E_\infty = 2310$ МПа, $m^* = 4,44$ МПа, $\eta_0 = 1.8 \cdot 10^8$ МПа·с, размеры: $R = 1$ м, $h = 15$ мм.

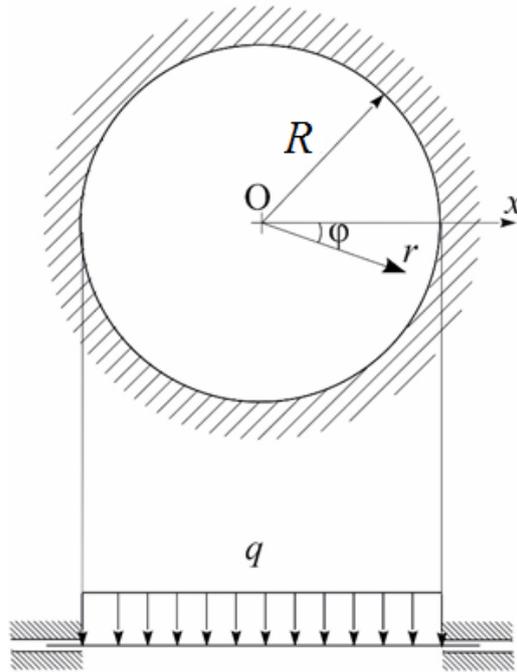


Рис. 2.8 – Круглая защемленная по контуру пластинка

В настоящей диссертации было выполнено решение данной задачи без учета осевой симметрии с использованием плоских треугольных конечных элементов. Также задача была решена в осесимметричной постановке с учетом толщины пластины как для трехмерного тела (расчетная схема приведена на рис. 2.9). При решении в осесимметричной постановке использовались прямоугольные конечные элементы (рис. 2.10).

Для перемещений принималась следующая аппроксимация:

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 z + \alpha_4 r z; \\ w &= \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 z + \beta_4 r z. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Или в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & r & z & r \cdot z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r & z & r \cdot z \end{Bmatrix} \{\alpha\}, \quad (2.53)$$

где $\{\alpha\} = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \beta_4\}^T$.

Коэффициенты α_i и β_i находятся путем подстановки в (2.53) координат узлов:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ u_3 \\ w_3 \\ u_4 \\ w_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & z_1 & r_1 z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_1 & z_1 & r_1 z_1 \\ 1 & r_2 & z_2 & r_2 z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_2 & z_2 & r_2 z_2 \\ 1 & r_3 & z_3 & r_3 z_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_3 & z_3 & r_3 z_3 \\ 1 & r_4 & z_4 & r_4 z_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r_4 & z_4 & r_4 z_4 \end{bmatrix} \{\alpha\} = [C]\{\alpha\}. \quad (2.54)$$

Здесь следует отметить, что $r_1 = r_4$, $r_2 = r_3$, $z_1 = z_2$ и $z_3 = z_4$. Из (2.54):
 $\{\alpha\} = [C]^{-1}\{U\}$.

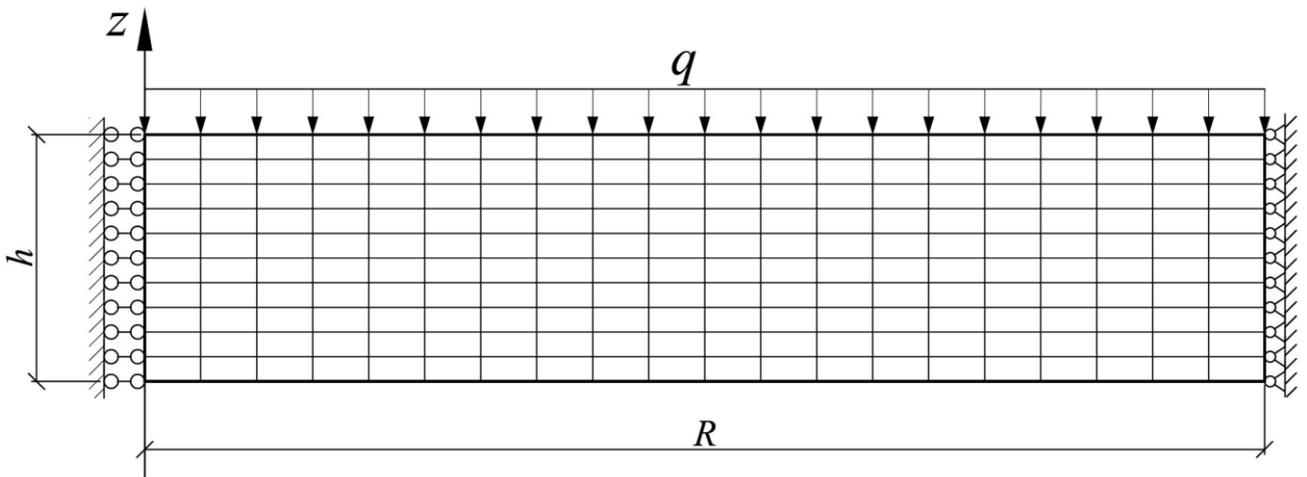


Рис. 2.9 – Расчетная схема при решении задачи в осесимметричной постановке

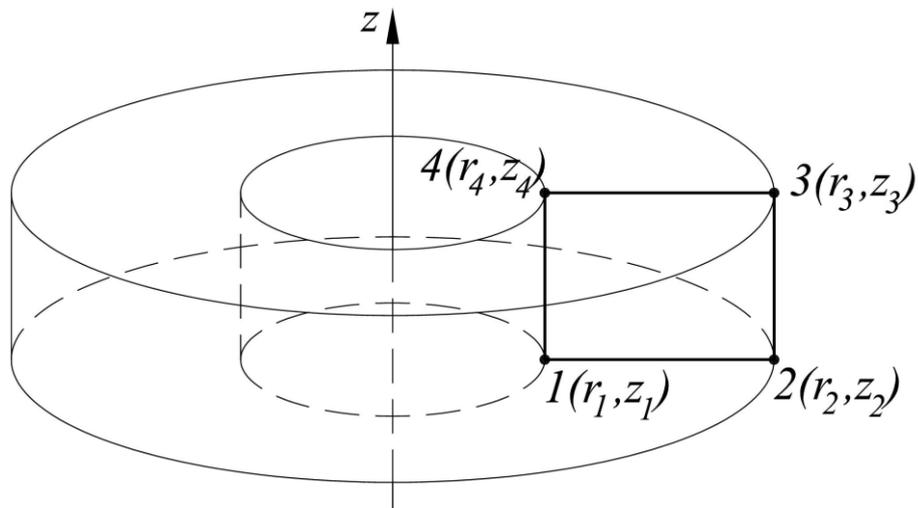


Рис. 2.10 – Прямоугольный конечный элемент осесимметричной задачи

Связь между деформациями и перемещениями для осесимметричной задачи записывается в виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ u \\ r \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{z}{r} & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r & 1 & \frac{z}{r} & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r \\ 0 & 0 & 1 & r & 0 & 1 & 0 & z \end{bmatrix} \{\alpha\} = \quad (2.55)$$

$$= [B]\{U\}.$$

Физические уравнения имеют вид:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \end{Bmatrix} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}), \quad (2.56)$$

где

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix};$$

$$\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon_r^* \quad \varepsilon_\theta^* \quad \varepsilon_z^* \quad \gamma_{rz}^*\}^T.$$

Потенциальная энергия деформации записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} 2\pi r dr dz, \quad (2.57)$$

где $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}$ – вектор упругих деформаций.

Окончательно задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей вид (2.30). Матрица жесткости $[K]$ и вклад деформаций ползучести в вектор нагрузки $\{F^*\}$ вычисляются следующим образом:

$$[K] = \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr dz; \quad (2.58)$$

$$\{F^*\} = \int_{z_1}^{z_2} \int_{r_1}^{r_2} [B]^T 2\pi r dr dz [D] \{\varepsilon^*\}.$$

Интегрирование выражений (2.58) было выполнено точно с использованием символьных операций пакета Matlab. Подпрограмма для получения коэффициентов матрицы жесткости и вектора нагрузки приводится в приложении. Сами коэффициенты не приведены ввиду их громоздкости.

Полученный в результате расчета график роста прогиба в центре пластины показан на рис. 2.11. Штриховой линии соответствует решение с использованием плоских треугольных КЭ пластин, а сплошной – прямоугольных КЭ осесимметричной задачи. При решении в осесимметричной постановке пластина разбивалась на 10 отрезков по высоте и 500 отрезков по радиусу. В начале процесса ползучести результаты практически совпадают, а при $t = 100$ ч отличаются на 2.9 %. В табл. 2.2 приведено сравнение перемещений, полученных автором, с решением научного руководителя. Значениям w_1 соответствует решение А.С. Чепурненко методом конечных разностей, w_2 – решение автора при помощи плоских треугольных КЭ пластин, w_3 – решение автора с использованием прямоугольных КЭ осесимметричной задачи.

Табл. 2.2 – Сравнение результатов, полученных автором, с решением А. С. Чепурненко

t, час	0	10	20	30	40	50	60	70
w_1 , мм	1.6657	2.3024	2.7473	3.0261	3.2023	3.3141	3.3852	3.4305
w_2 , мм	1.6850	2.4051	2.8379	3.1022	3.2652	3.3661	3.4288	3.4678
w_3 , мм	1.6552	2.3569	2.7729	3.0240	3.1770	3.2708	3.3284	3.3639

Распределение напряжений $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{rz}$ в зависимости от r и z в конце процесса ползучести при решении в двумерной осесимметричной постановке показано соответственно на рис. 2.12 – рис. 2.15. Из рис. 2.12 и рис. 2.13 видно, что радиальные и кольцевые напряжения по толщине пластины в конце процесса ползучести распределяются линейно. Этот результат, доказанный в работах [42, 58] на основе теории Кирхгофа-Лява, подтверждается и при расчете пластины как трехмерного тела.

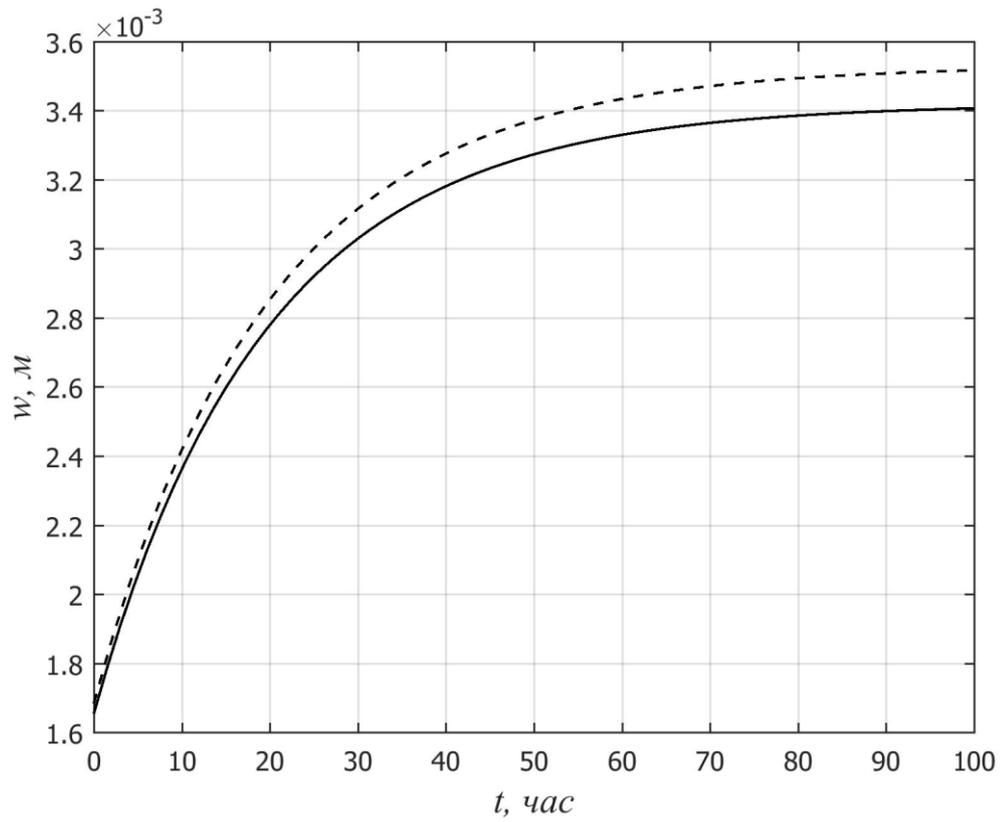


Рис. 2.11 – График роста прогиба в центре пластины: штриховая линия – плоские треугольные КЭ, сплошная линия – осесимметричные прямоугольные КЭ

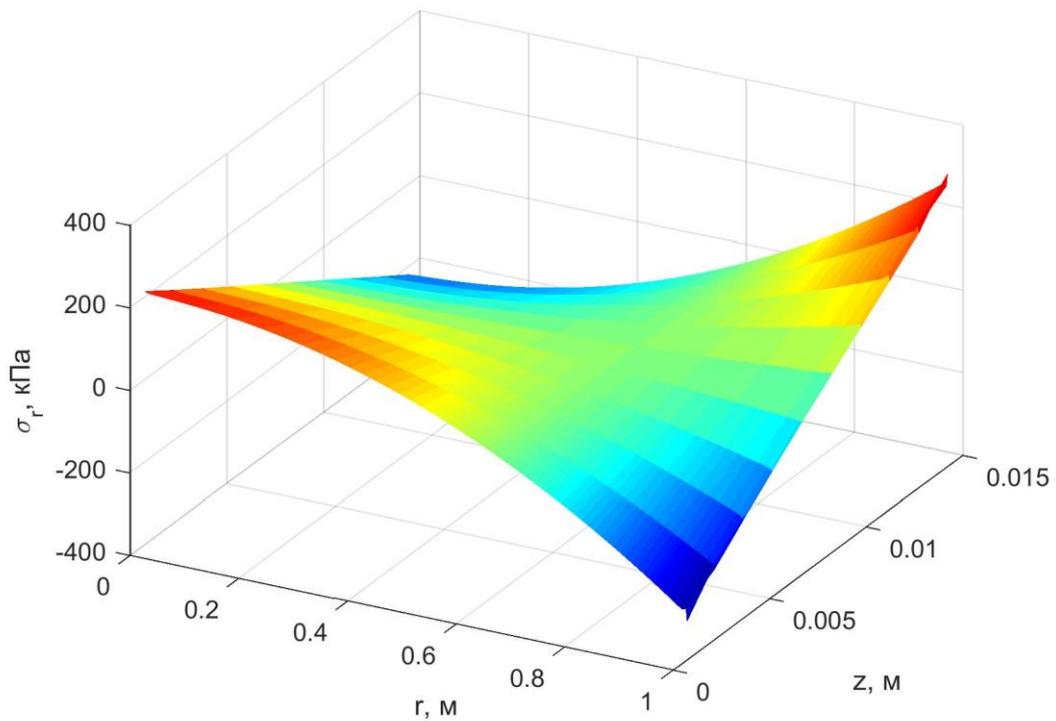


Рис. 2.12 – Распределение радиальных напряжений в зависимости от r и z в конце процесса ползучести

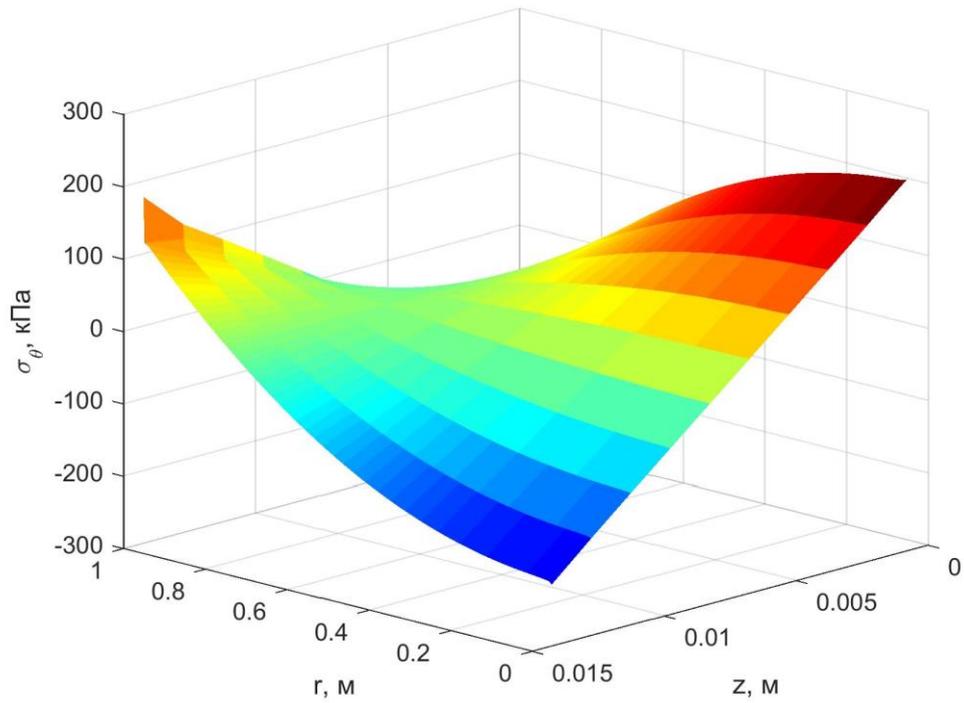


Рис. 2.13 – Распределение кольцевых напряжений в зависимости от r и z в конце процесса ползучести

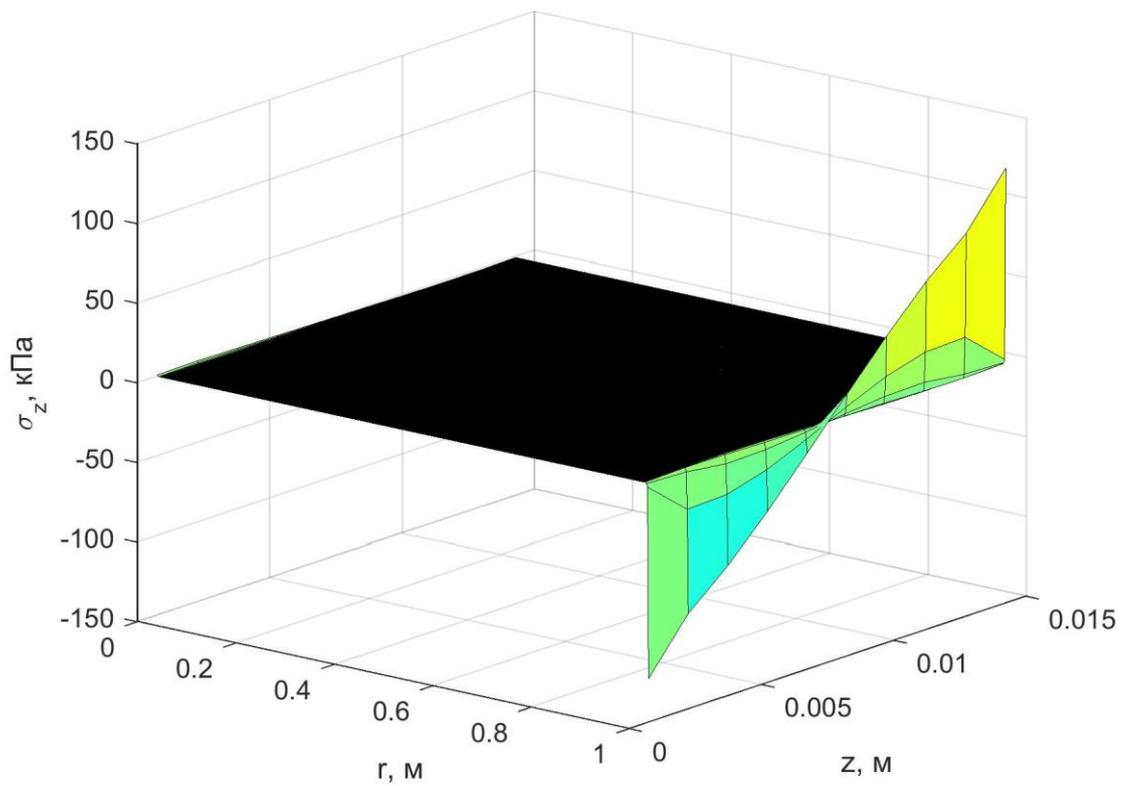


Рис. 2.14 – Распределение напряжений σ_z в зависимости от r и z

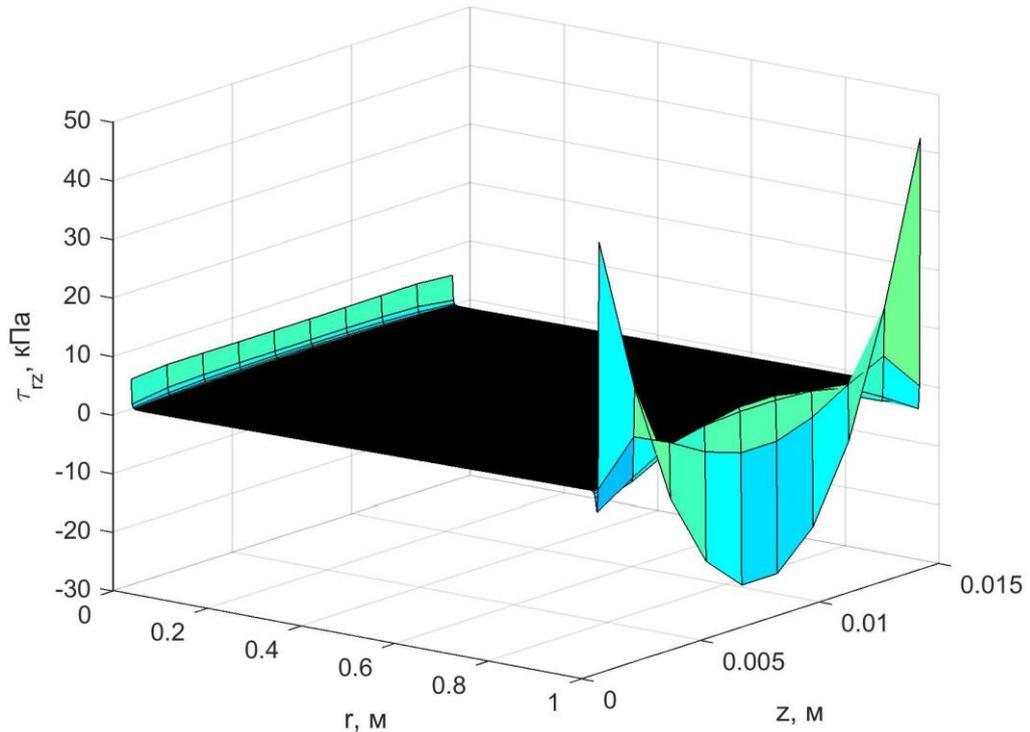


Рис. 2.15 – Распределение касательных напряжений в зависимости от r и z

Из рис. 2.14 и рис. 2.15 видно, что напряжения τ_{rz} и σ_z малы за исключением приопорной зоны. На графике касательных напряжений также наблюдается небольшой всплеск при $r = 0$. Это связано с тем, что соотношение $\varepsilon_\theta = u/r$ при $r = 0$ становится неопределенным, поскольку перемещения u на оси симметрии также обращаются в нуль. В связи с этим, если координата какого-то узла оказывается равной нулю, приходится заменять это значение на очень маленькое число, чтобы избежать неопределенностей.

2.5 Плоское напряженное состояние полимерных пластин в условиях вязкоупругости

Уравнения равновесия для плоской задачи теории упругости записываются в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \tag{2.59}$$

где X и Y – компоненты объемных сил.

Эти уравнения будут удовлетворены, если ввести функцию напряжений φ по формулам:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx.\end{aligned}\tag{2.60}$$

Связь между деформациями и напряжениями записывается в виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) + \varepsilon_x^* = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) + \varepsilon_x^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) + \varepsilon_y^* = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right) + \varepsilon_y^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + \gamma_{xy}^* = \frac{2(1+\nu)}{E}\left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx\right) + \gamma_{xy}^*.\end{aligned}\tag{2.61}$$

Уравнение совместности деформаций для плоской задачи имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.\tag{2.62}$$

Подставив (2.61) в (2.62) при постоянстве объемных сил получим:

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y^*}{\partial x^2}.\tag{2.63}$$

Для прямоугольных пластин уравнение (2.63) может быть решено методом конечных разностей. В качестве граничных условий можно использовать рамную аналогию: изгибающий момент на контуре равен функции напряжений φ , а продольная сила – ее производной по нормали $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$. Для пластин сложной формы, а также при наличии отверстий рационально использовать метод конечных элементов.

2.6 Расчет концентрации напряжений при растяжении пластинки из ПММА с отверстием

Рассмотрим решение задачи растяжения полосы с отверстием с учетом ползучести материала. Расчет будем вести методом конечных элементов. Используются треугольные конечные элементы, рассмотренные в параграфе 2.2.

Перемещения u и v в пределах элемента будем аппроксимировать линейными функциями:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3; \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3, \end{aligned} \quad (2.64)$$

где N_i – функции формы, совпадающие с естественными координатами L_i . (формула (2.19))

Связь между деформациями и перемещениями для плоской задачи теории упругости записывается в виде [62]:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (2.65)$$

Подставив (2.64) в (2.65), получим:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{U\}. \quad (2.66)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации (2.23) и связь между деформациями и напряжениями (2.25) также справедливы и для плоской задачи. В итоге потенциальная энергия деформации записывается следующим образом:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} h \int_A (\{\varepsilon\}^T - \{\varepsilon^*\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}) dA = \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} h \left(\int_A \{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} dA - \int_A \{U\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dA - \right. \\
&\quad \left. - \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] [B] \{U\} dA + \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\} dA \right) = \\
&= \frac{1}{2} h A (\{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} - 2 \{U\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} + \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\}).
\end{aligned}$$

Дифференцируя потенциальную энергию по узловым перемещениям $\{U\}$, получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = [K] \{U\} - \{F^*\}, \quad (2.68)$$

где $[K] = hA[B]^T[D][B]$, $\{F^*\} = hA[B]^T[D]\{\varepsilon^*\}$.

Окончательный вид системы разрешающих уравнений такой же, как и в параграфе 2.2 (формула (2.30)).

Была решена тестовая задача для квадратной пластинки из ПММА размерами 8x8 см с отверстием радиусом 1 см. Пластинка в направлении x растягивается нагрузкой $q = 6$ МН/м². Данная задача представляет большой практический интерес, поскольку полиметилметакрилат широко используется в светопрозрачных конструкциях, при монтаже которых необходимы отверстия для крепежа. В силу симметрии рассматривалась четверть пластины, расчетная схема приведена на рис. 2.16.

В качестве закона ползучести использовалось уравнение Максвелла-Гуревича. Упругие и реологические параметры оргстекла марки ГОСП (пластифицированный полиметилметакрилат): $E = 2940$ МПа, $E_\infty = 2500$ МПа, $m^* = 4.5$ МПа, $\eta_0^* = 10^{10}$ МПа·с. При расчете использовалось неравномерное разбиение со сгущением сетки у отверстия. Сетка конечных элементов показана на рис. 2.17.

На рис. 2.18 приведен график изменения во времени наибольшей величины перемещений u . Перемещения в процессе ползучести выросли в 2.17 раз.

Изменение во времени максимальных значений напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} на начальном отрезке времени от 0 до 200 ч приведено соответственно на рис. 2.19 –

рис. 2.21 . Рис. 2.22 - рис. 2.24 – то же самое, но на временном интервале от 0 до 2000 ч.

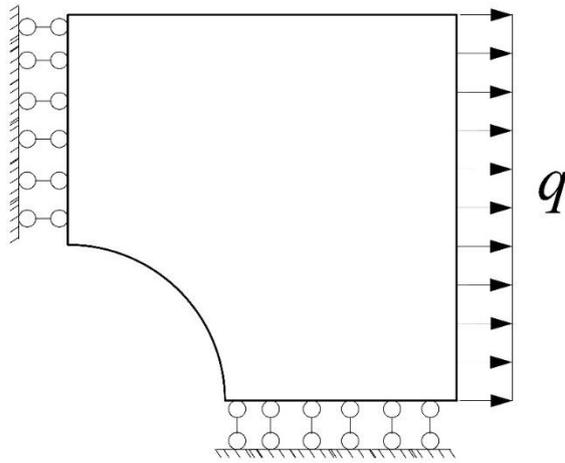


Рис. 2.16 – Расчетная схема

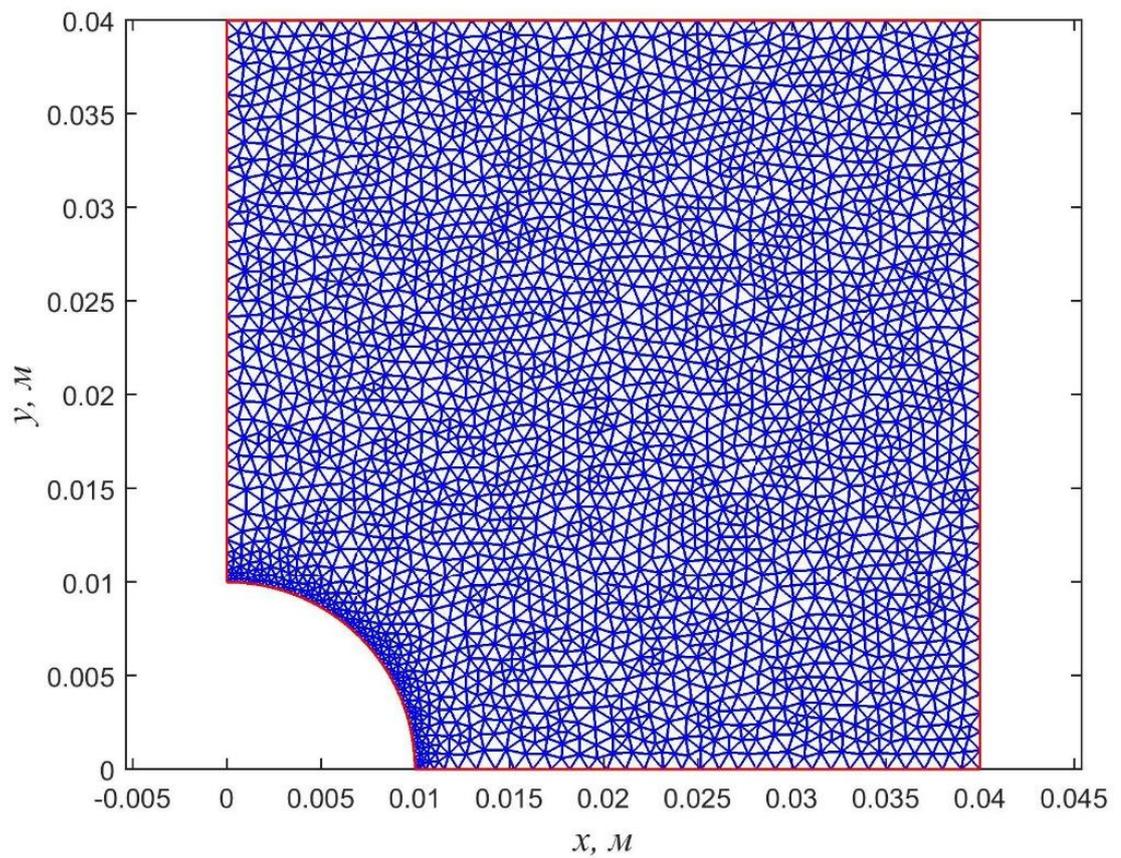


Рис. 2.17 – Сетка конечных элементов

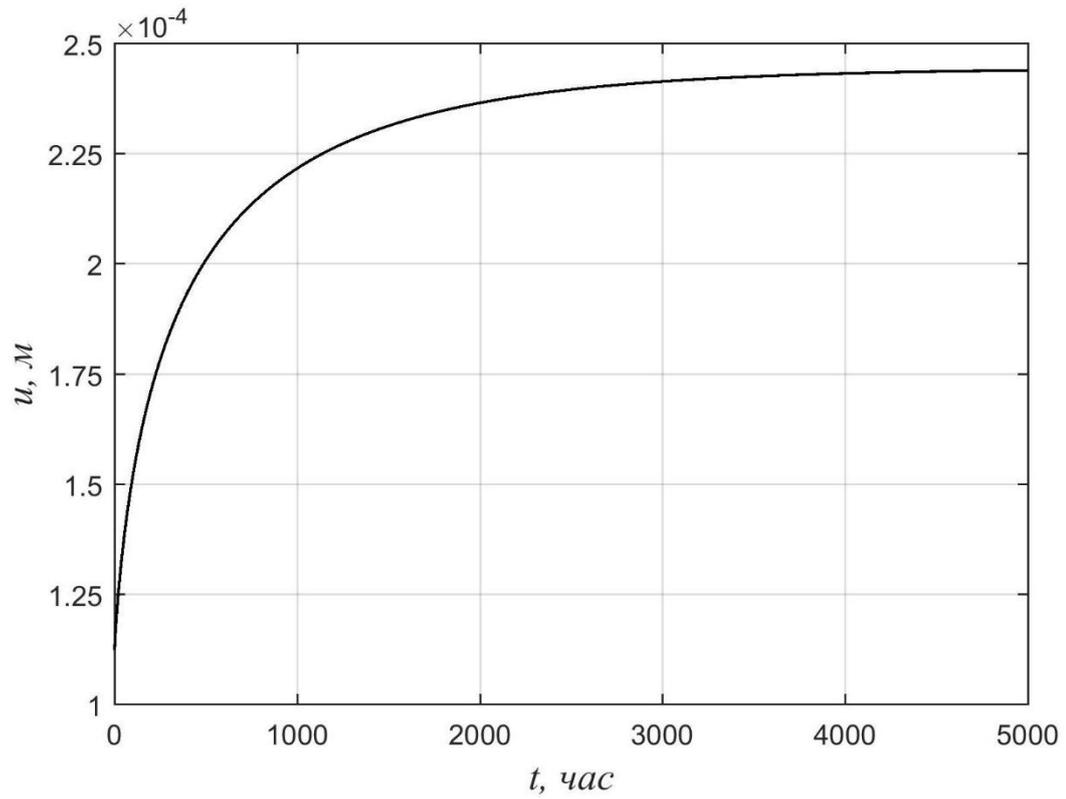


Рис. 2.18 – Изменение во времени наибольшей величины перемещений u

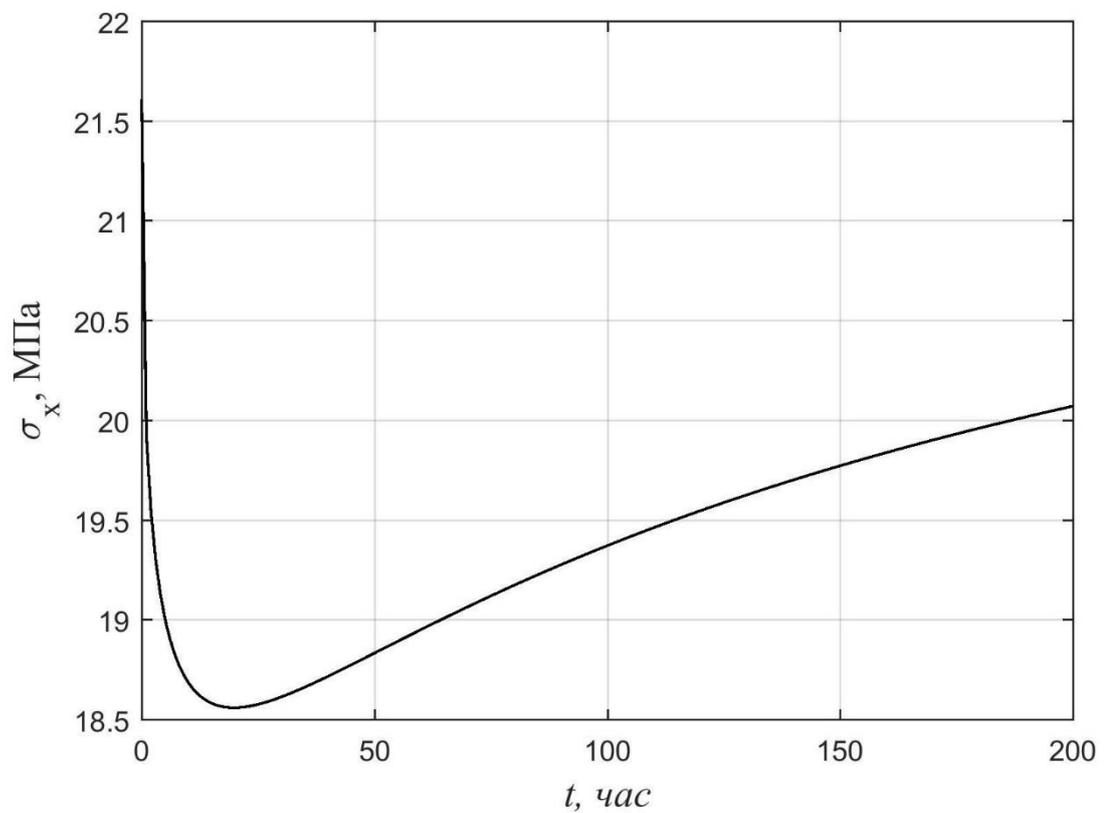


Рис. 2.19 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_x на интервале от 0 до 200 ч.

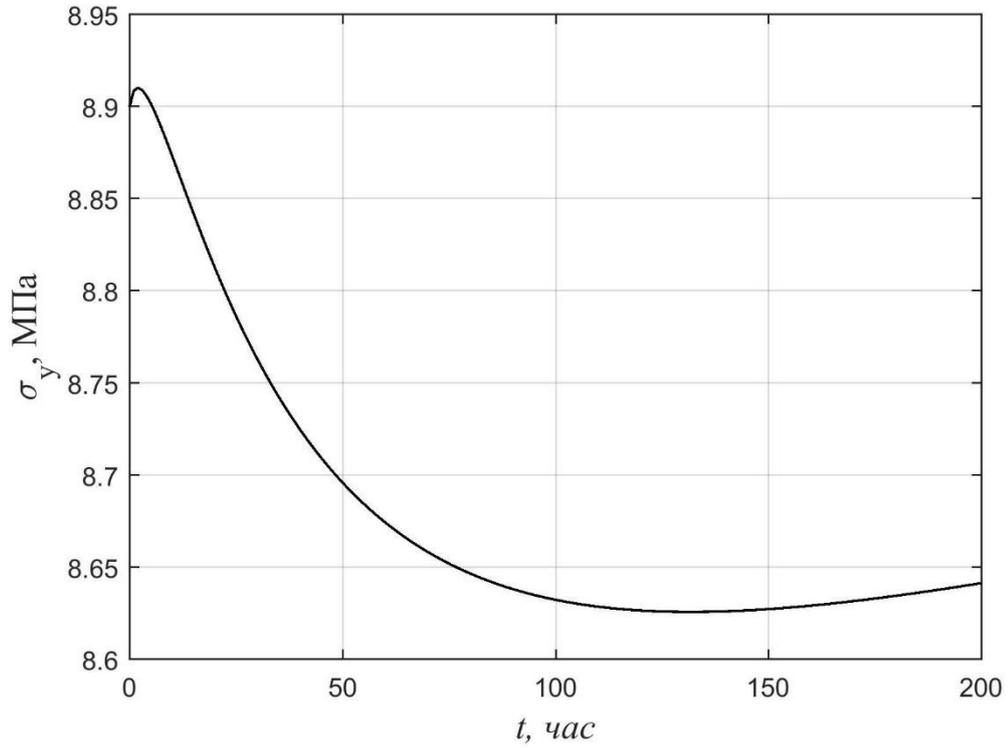


Рис. 2.20 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_y на интервале от 0 до 200 ч.

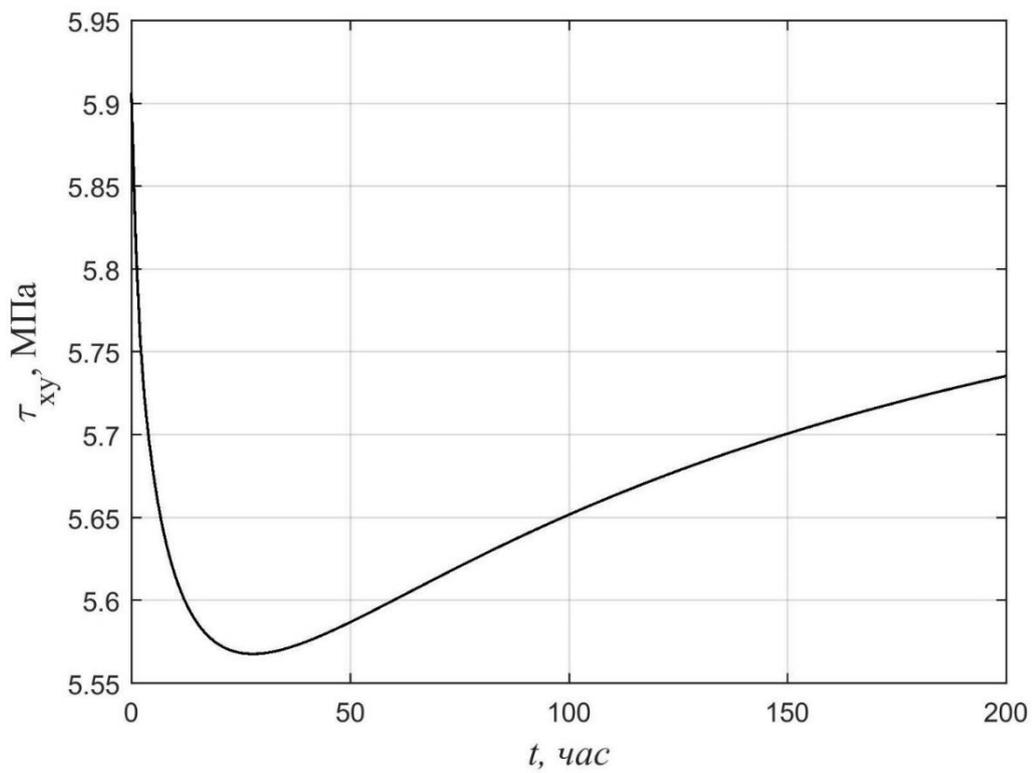


Рис. 2.21 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений τ_{xy} на интервале от 0 до 200 ч.

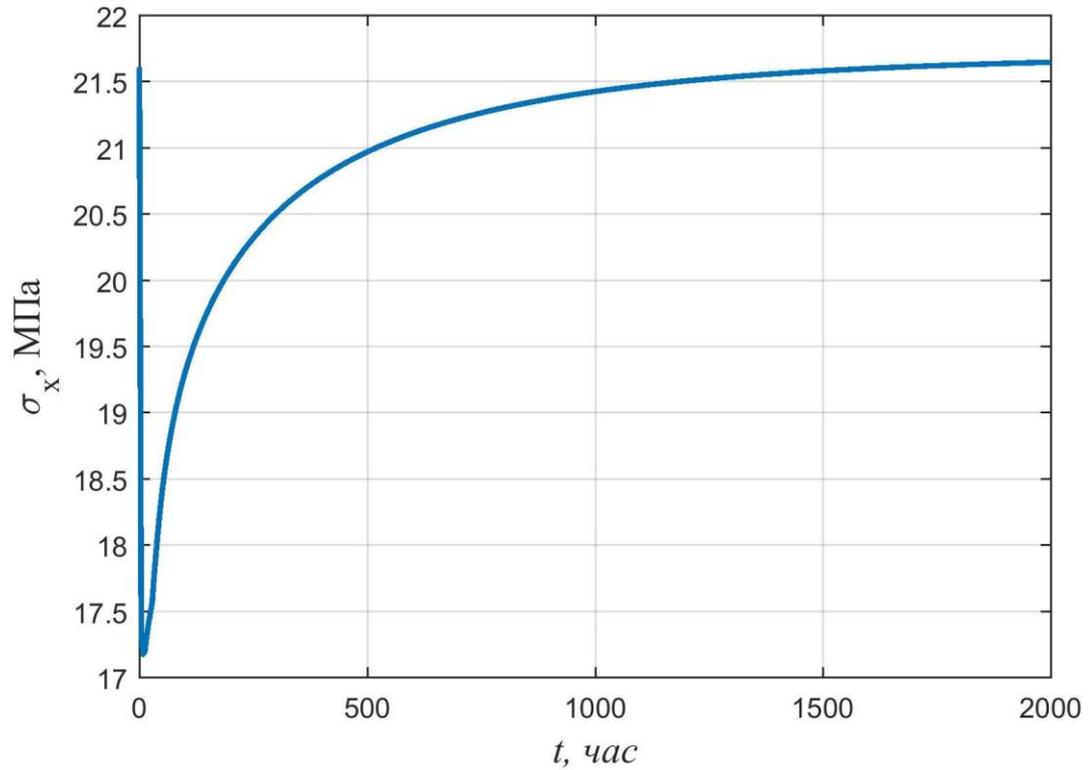


Рис. 2.22 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_x на интервале от 0 до 2000 ч.

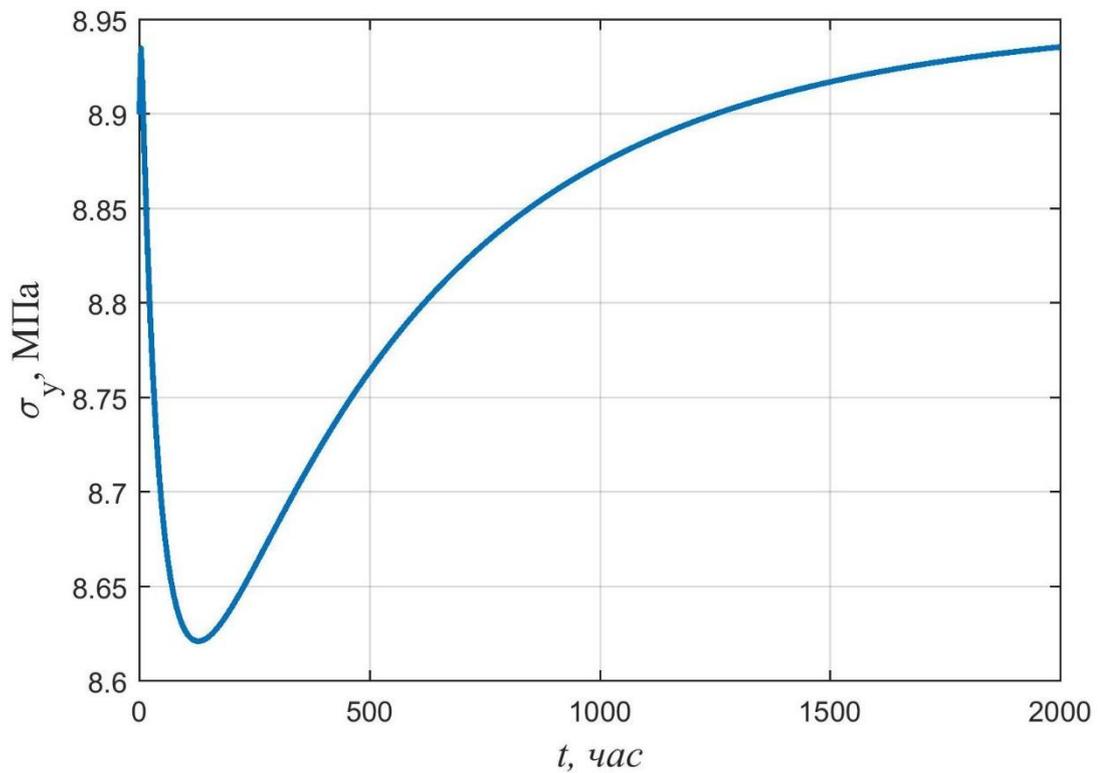


Рис. 2.23 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_y на интервале от 0 до 2000 ч.

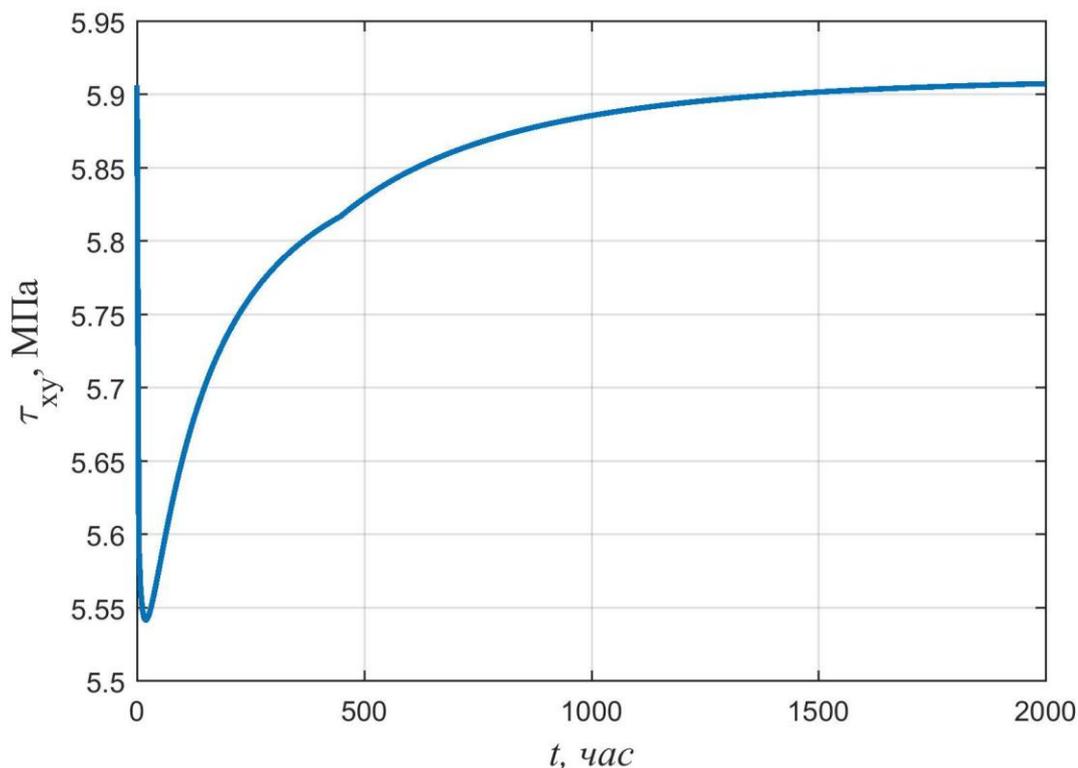


Рис. 2.24 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений τ_{xy} на интервале от 0 до 2000 ч.

Из представленных графиков видно, что напряжения сначала убывают, а потом возрастают. В конце процесса ползучести происходит возврат к упругому решению. Объясняется это тем, что основное разрешающее уравнение плоской задачи теории упругости для пластинки из изотропного материала имеет вид:

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (2.69)$$

Для получения решения в конце процесса ползучести, достаточно во всех уравнениях для упругой задачи заменить мгновенный модуль упругости и коэффициент Пуассона на длительный. В уравнение (2.69) не входят упругие постоянные, следовательно, распределение напряжений в начале и в конце процесса ползучести зависит только от граничных условий на контуре.

Распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в зависимости от x и y при $t = 0$ приведено соответственно на рис. 2.25 – рис. 2.27. Коэффициент концентрации, равный отношению наибольшего значения напряжения σ_x к величине напряжения на торце q , для рассмотренной задачи составил примерно 3.6. Для случая, когда

размеры отверстия малы по сравнению с размерами пластины, имеется аналитическое решение (задача Кирша), и коэффициент концентрации в этом случае равен 3.

Для проверки правильности работы программы была решена задача при тех же размерах пластины, но с радиусом отверстия 2.5 мм. При этом получен коэффициент концентрации 3.0143.

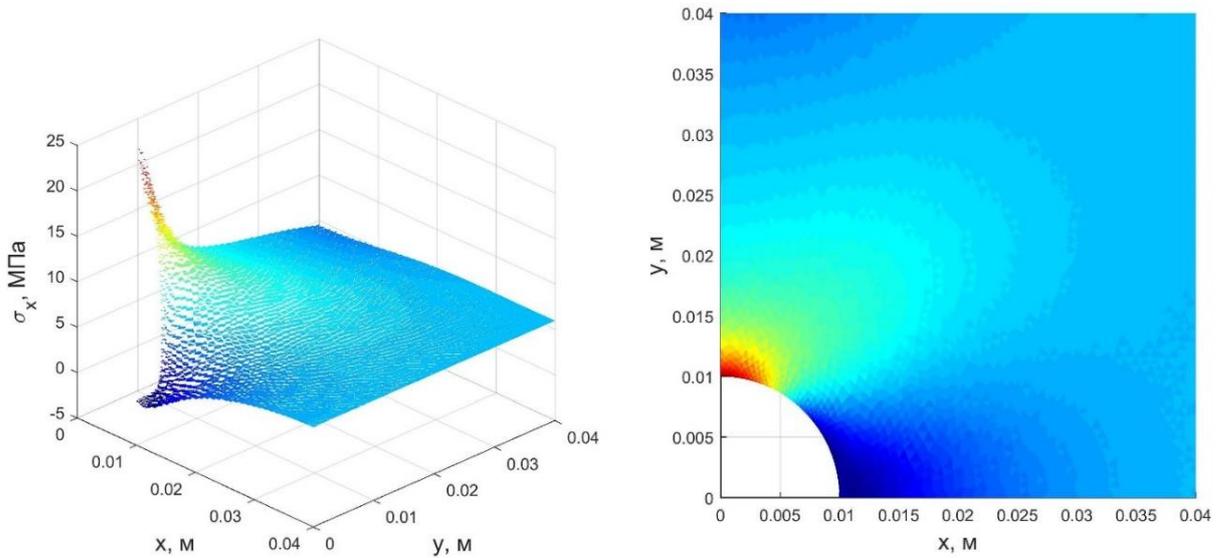


Рис. 2.25 – Распределение напряжений σ_x в зависимости от x и y

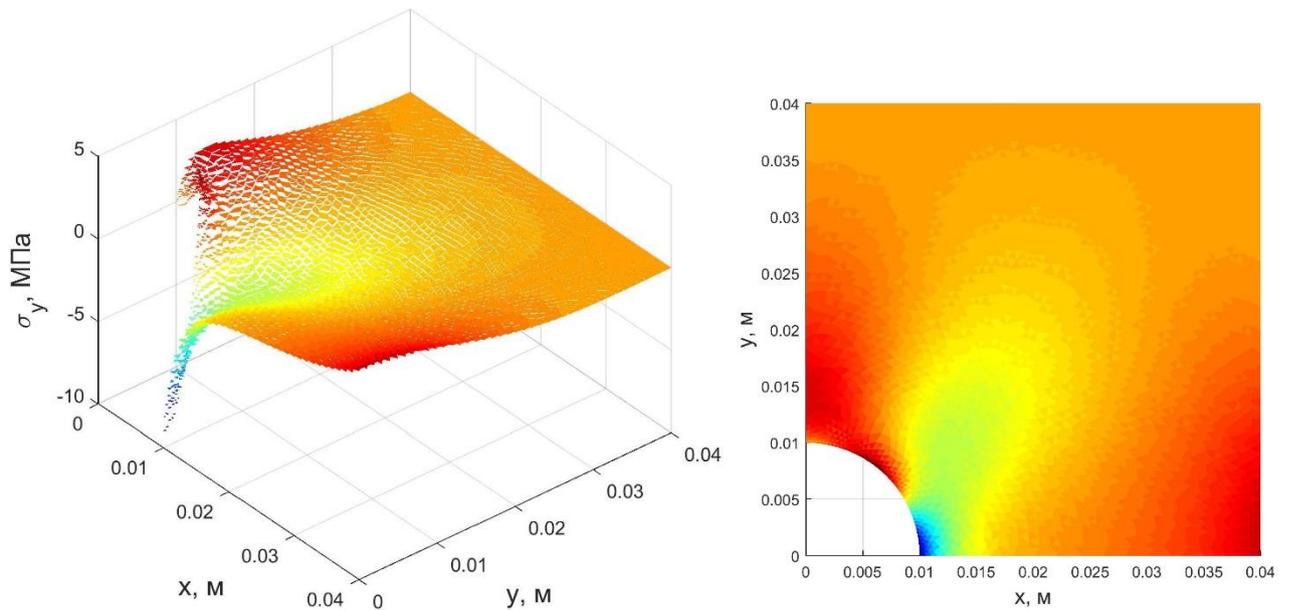


Рис. 2.26 – Распределение напряжений σ_y в зависимости от x и y

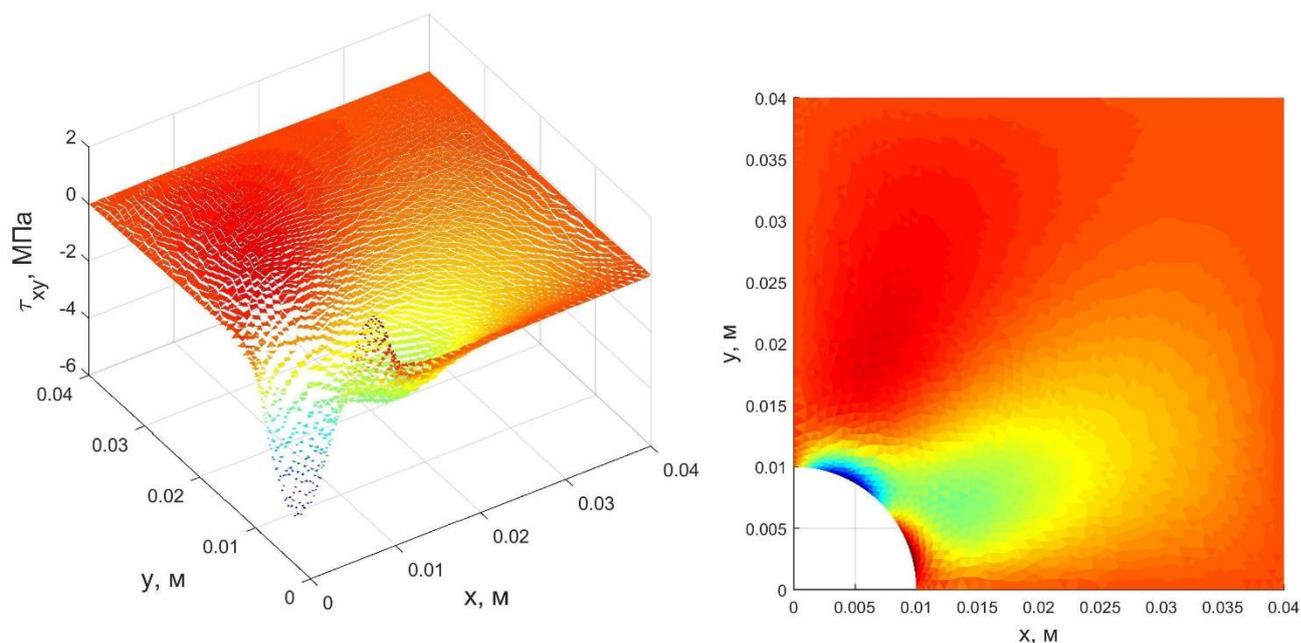


Рис. 2.27 – Распределение касательных напряжений в зависимости от x и y

2.7 Выводы по главе

Получены универсальные разрешающие уравнения для расчета на изгиб с учетом ползучести тонких жестких изотропных полимерных пластин. Разработана методика конечно-элементного расчета с использованием треугольных конечных элементов. Приведено численно-аналитическое решение задачи с использованием двойных тригонометрических рядов. На примере пластинки из вторичного поливинилхлорида показано, что напряжения в процессе ползучести меняются незначительно.

Рассмотрена задача осесимметричного изгиба круглых пластин на примере пластинки из ЭДТ-10. Решение выполнено на основе теории тонких пластин, а также как для трехмерного тела с учетом толщины при помощи осесимметричных прямоугольных конечных элементов.

Приведены разрешающие уравнения для случая плоского напряженного состояния полимерных пластин в условиях вязкоупругости. Методом конечных элементов решена задача растяжения пластинки из полиметилметакрилата с отверстием с учетом ползучести. Установлено, что в начале процесса ползучести происходит релаксация напряжений, а затем возврат к упругому решению.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН ИЗ АРМИРОВАННЫХ ПОЛИМЕРОВ

3.1 Изгиб ортотропной пластинки: вывод разрешающих уравнений

Для ортотропной пластинки связь между деформациями и напряжениями с учетом ползучести имеет вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2} + \varepsilon_x^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_x}{E_1} + \varepsilon_y^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} + \gamma_{xy}^*,\end{aligned}\tag{3.1}$$

где ε_x^* , ε_y^* , γ_{xy}^* – деформации ползучести.

Выразим из (3.1) напряжения через деформации:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\varepsilon_x + \nu_2 \varepsilon_y - (\varepsilon_x^* + \nu_2 \varepsilon_y^*) \right); \\ \sigma_y &= \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left(\varepsilon_y + \nu_1 \varepsilon_x - (\varepsilon_y^* + \nu_1 \varepsilon_x^*) \right); \\ \tau_{xy} &= G(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Геометрические уравнения (2.1) для ортотропной пластинки остаются справедливыми, также, как и уравнение равновесия (2.3). Подставив (2.1) в (3.2), получим:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= -\frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (\varepsilon_x^* + \nu_2 \varepsilon_y^*) \right]; \\ \sigma_y &= -\frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \left[z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - (\varepsilon_y^* + \nu_1 \varepsilon_x^*) \right]; \\ \tau_{xy} &= -G \left(2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \gamma_{xy}^* \right).\end{aligned}\tag{3.3}$$

Изгибающие и крутящий момент определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x z dz = -D_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_x^*; \\
M_y &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y z dz = -D_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_y^*; \\
H &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} z dz = -2D_\kappa \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - H^*,
\end{aligned} \tag{3.4}$$

где

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)}; \quad D_\kappa = \frac{G h^3}{12};$$

$$M_x^* = \frac{E_1}{1 - \nu_1 \nu_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_x^* + \nu_2 \varepsilon_y^*) z dz;$$

$$M_y^* = \frac{E_2}{1 - \nu_1 \nu_2} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\varepsilon_y^* + \nu_1 \varepsilon_x^*) z dz;$$

$$H^* = G \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xy}^* z dz.$$

Подставив (3.4) в (2.3), получим основное разрешающее уравнение:

$$D_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q - \left(\frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right), \tag{3.5}$$

где

$$D_3 = \frac{1}{2} (D_1 \nu_2 + D_2 \nu_1 + 4D_\kappa).$$

Уравнение (2.7) является частным случаем уравнения (3.5) при $E_1 = E_2 = E$ и $\nu_1 = \nu_2 = \nu$. Необходимо отметить, что $D_1 \nu_2 = D_2 \nu_1$.

3.2 Расчет на изгиб пластинки из стеклопластика ВПС-48/120

В работах [63, 64] для стеклопластиков приводится следующий закон деформирования:

$$\varepsilon_{ij}(t) = I_{ijkl}\sigma_{kl}(t) + \int_0^t K_{ijkl}(t - \tau)\sigma_{kl}(\tau)d\tau, \quad (3.6)$$

где ε_{ij} – тензор деформаций, σ_{kl} – тензор напряжений.

С учетом обозначений, принятых в параграфе 3.1, соотношения (3.6) в развернутом виде записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= I_{1111}\sigma_x + I_{1122}\sigma_y + \int_0^t K_{1111}(t - \tau)\sigma_x(\tau)d\tau + \int_0^t K_{1122}(t - \tau)\sigma_y(\tau)d\tau; \\ \varepsilon_y &= I_{1122}\sigma_x + I_{2222}\sigma_y + \int_0^t K_{1122}(t - \tau)\sigma_x(\tau)d\tau + \int_0^t K_{2222}(t - \tau)\sigma_y(\tau)d\tau; \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} &= 2I_{1212}\tau_{xy} + 2 \int_0^t K_{1212}(t - \tau)\tau_{xy}(\tau)d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Технические постоянные $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$ связаны с коэффициентами I_{ijkl} следующим образом [65]:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{I_{1111}}; E_2 = \frac{1}{I_{2222}}; G = \frac{1}{4I_{1212}}; \\ \nu_1 &= -\frac{I_{1122}}{I_{1111}}; \nu_2 = -\frac{I_{1122}}{I_{2222}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Функции ядер $K_{ijkl}(t) = \varphi_m$ в работах [63, 64] принимаются в виде суммы экспонент:

$$\varphi_m(t) = \frac{\lambda_m}{3} \sum_{i=1}^3 \beta_{mi} \exp(-\beta_{mi}t). \quad (3.9)$$

Индекс m в формуле (3.9) соответствует номеру ядра ползучести: $K_{1111} = \varphi_1$, $K_{2222} = \varphi_2$, $K_{1122} = \varphi_3$, $K_{1212} = \varphi_4$. В качестве примера рассмотрим стеклопластик ВПС-48/120 на основе расплавленного эпоксидного связующего ВСЭ-1212 и

стеклотканей фирмы Porcher Ind, используемый в авиастроении, а также при изготовлении сильно нагруженных элементов, работающих в агрессивных средах. Упругие и реологические характеристики стеклопластика ВПС-48/120, взятые из работы [63] приведены в табл. 3.1.

Табл. 3.1 – Упругие и реологические характеристики стеклопластика ВПС-48/120

$\varphi_1(t)$			$\varphi_2(t)$			$\varphi_3(t)$			$\varphi_4(t)$		
I_{1111} $\cdot 10^4$	λ_1 $\cdot 10^4$	β_{1i} $\cdot 10^4$	I_{2222} $\cdot 10^3$	λ_2 $\cdot 10^4$	β_{2i} $\cdot 10^4$	I_{1122} $\cdot 10^4$	λ_3 $\cdot 10^4$	β_{3i} $\cdot 10^4$	$2I_{1212}$ $\cdot 10^3$	λ_4 $\cdot 10^3$	β_{4i} $\cdot 10^4$
2,02	0	1	1,16	1,87	0,29	0,68	0	1	1,98	4,8	0,28
		1			1,33			1			1,29
		1			3,73			1			3,37

В таблице приняты следующие единицы измерения: I_{ijkl} , λ_m – мм²/кгс, β_{mi} – 1/ч.

Из табл. 3.1 следует, что для указанного стеклопластика в направлении армирующих волокон ползучесть отсутствует, т.е. $\varepsilon_x^* = 0$. Деформация ε_y^* из соотношений (3.7) определяется следующим образом:

$$\varepsilon_y^* = \int_0^t K_{2222}(t - \tau)\sigma_y(\tau)d\tau = \frac{\lambda_2}{3} \sum_{i=1}^3 \beta_{2i} \int_0^t e^{-\beta_{2i}(t-\tau)} \sigma_y(\tau)d\tau. \quad (3.10)$$

Представим деформацию ε_y^* в виде суммы трех составляющих:

$$\varepsilon_y^* = \varepsilon_{1y}^* + \varepsilon_{2y}^* + \varepsilon_{3y}^*, \quad (3.11)$$

где

$$\varepsilon_{iy}^* = \frac{\lambda_2}{3} \beta_{2i} \int_0^t e^{-\beta_{2i}(t-\tau)} \sigma_y(\tau)d\tau = \frac{\lambda_2}{3} \beta_{2i} e^{-\beta_{2i}t} \int_0^t e^{\beta_{2i}\tau} \sigma_y(\tau)d\tau.$$

Продифференцируем каждую составляющую ε_{iy}^* по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{iy}^*}{\partial t} &= \frac{\lambda_2 \beta_{2i}}{3} \frac{\partial}{\partial t} \left(e^{-\beta_{2i}t} \int_0^t e^{\beta_{2i}\tau} \sigma_y(\tau) d\tau \right) \\ &= \frac{\lambda_2 \beta_{2i}}{3} \left(-\beta_{2i} e^{-\beta_{2i}t} \int_0^t e^{\beta_{2i}\tau} \sigma_y(\tau) d\tau + e^{-\beta_{2i}t} e^{\beta_{2i}t} \sigma_y(t) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Окончательно выражение для скорости роста составляющих деформации ползучести ε_y^* принимает вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{iy}^*}{\partial t} = \beta_{2i} \left(\frac{\lambda_2}{3} \sigma_y(t) - \varepsilon_{iy}^* \right). \quad (3.13)$$

Сдвиговая деформация ползучести γ_{xy}^* из соотношений (3.7) определяется следующим образом:

$$\gamma_{xy}^* = 4 \int_0^t K_{1212}(t-\tau) \tau_{xy}(\tau) d\tau = \frac{4\lambda_4}{3} \sum_{i=1}^3 \beta_{4i} \int_0^t e^{-\beta_{4i}(t-\tau)} \tau_{xy}(\tau) d\tau. \quad (3.14)$$

Как и ε_y^* , деформация γ_{xy}^* представляется в виде суммы трех составляющих:

$$\gamma_{xy}^* = \sum_{i=1}^3 \gamma_{xy,i}^*. \quad (3.15)$$

Дифференцируя каждую составляющую по времени, получим:

$$\frac{\partial \gamma_{xy,i}^*}{\partial t} = 2\beta_{4i} \left(\frac{2\lambda_4}{3} \tau_{xy}(t) - \gamma_{xy,i}^* \right). \quad (3.16)$$

Выражения (3.13) и (3.16) позволяют ввести сетку по времени и произвести расчет шаговым методом с использованием линейной аппроксимации скорости роста высокоэластических деформаций.

Была решена тестовая задача для шарнирно опертой по контуру пластинки, загруженной равномерно распределенной по площади нагрузкой (рис. 2.4) при следующих данных: размеры пластины $a = b = 1$ м, толщина $h = 1$ см, нагрузка $q = 2$ кПа.

На рис. 3.1 приведен график роста прогиба в центре пластины. Прогиб в процессе ползучести вырос на 13.4%. Деформированная поверхность пластинки при $t = 0$ и $t = 30000$ ч показана на рис. 3.2.

Графики изменения во времени наибольших по абсолютному значению величин напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} приведены соответственно на рис. 3.3 – рис. 3.5. Из представленных графиков видно, что напряжения σ_x во времени возрастают, их рост составил 13.1 %. Распределение напряжений σ_x в зависимости от x и y в начале и в конце процесса ползучести у верхней поверхности пластины представлено на рис. 3.6.

Напряжения σ_y сначала возрастают, а затем убывают. Наибольшее значение отличается от первоначального на 5%, а наименьшее – на 2%. Распределение напряжений σ_y у нижней поверхности как функции от x и y при $t = 60\,000$ ч приведено на рис. 3.7.

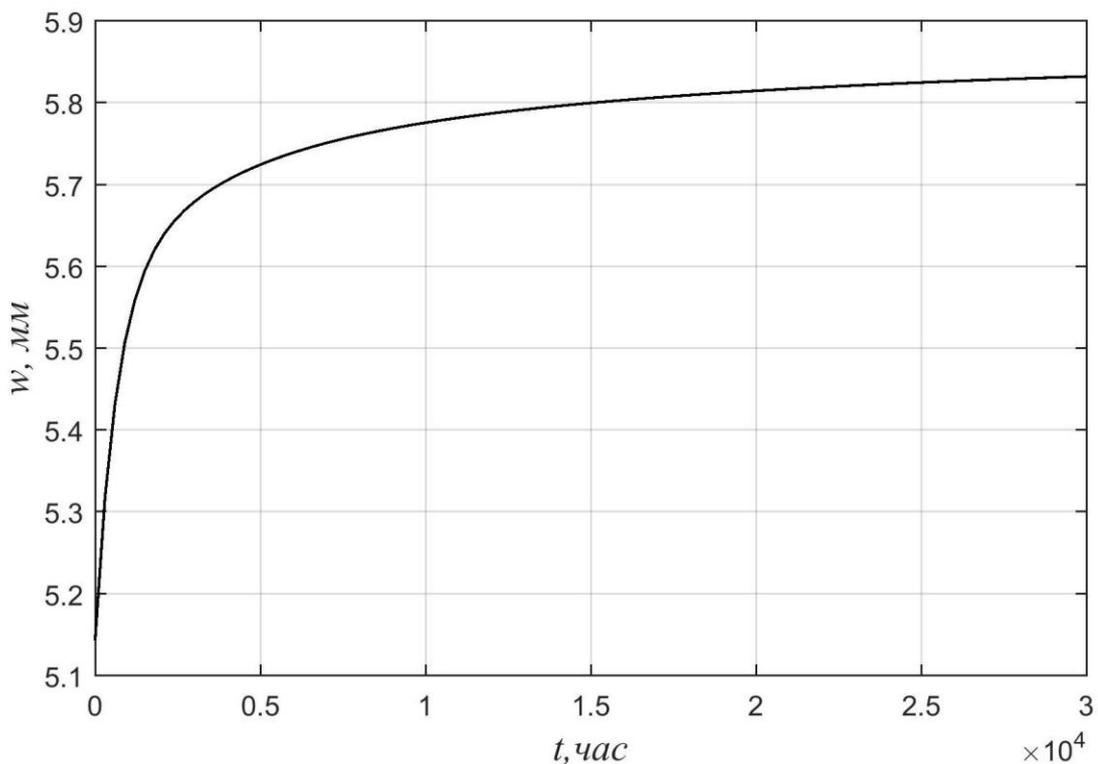


Рис. 3.1 – График роста прогиба в центре пластины

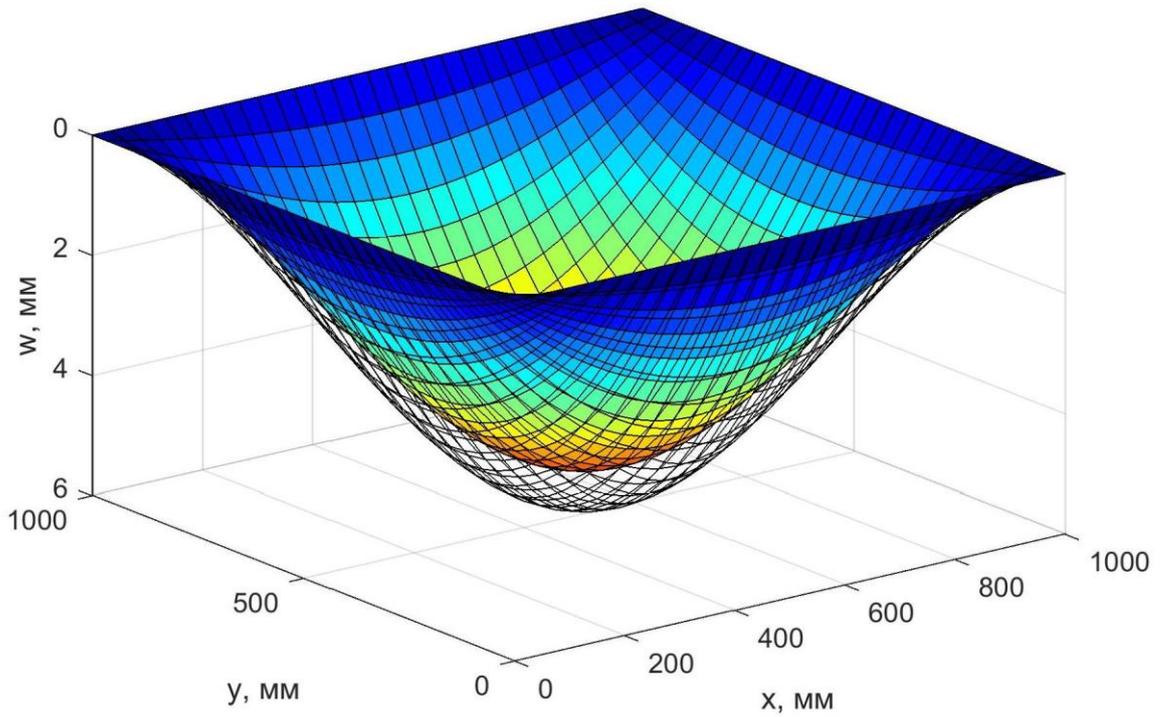


Рис. 3.2 – Распределение перемещений пластинки при $t = 0$ (закрашенная поверхность) и при $t = 30\,000$ ч (сетчатая поверхность).

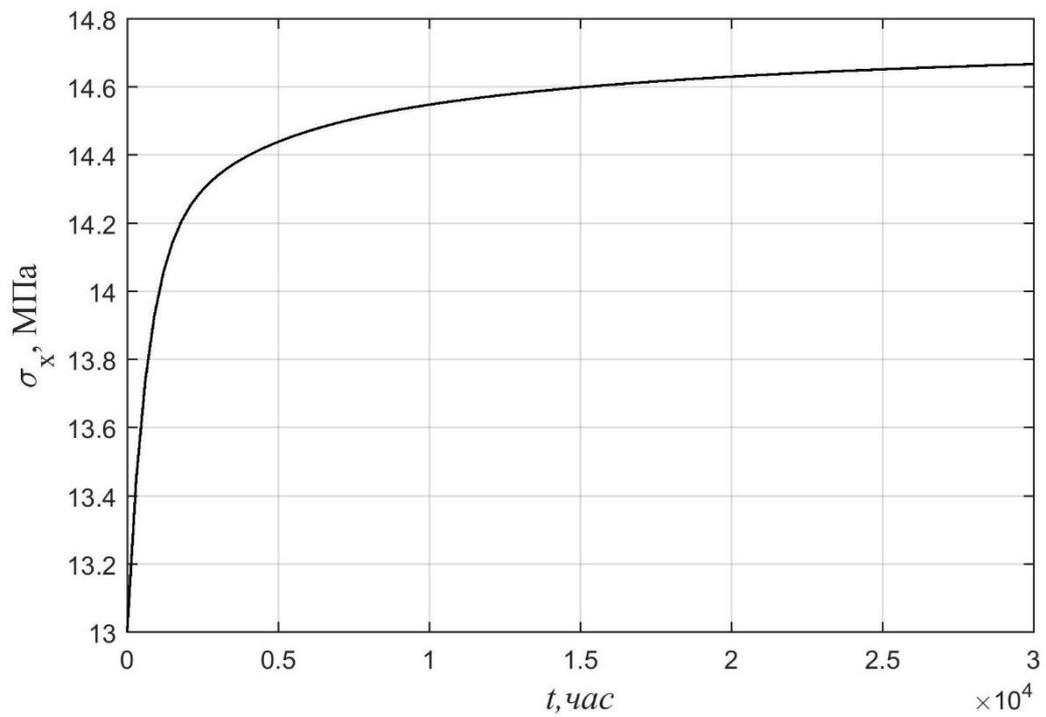


Рис. 3.3 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_x

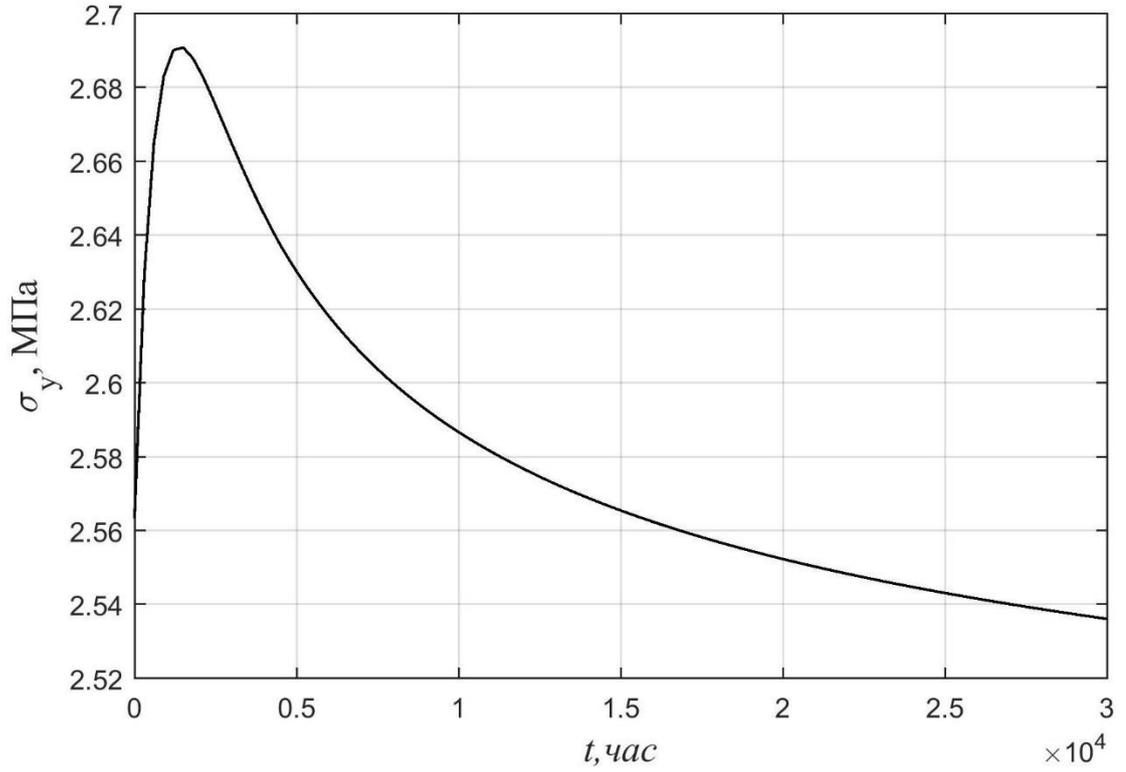


Рис. 3.4 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_y

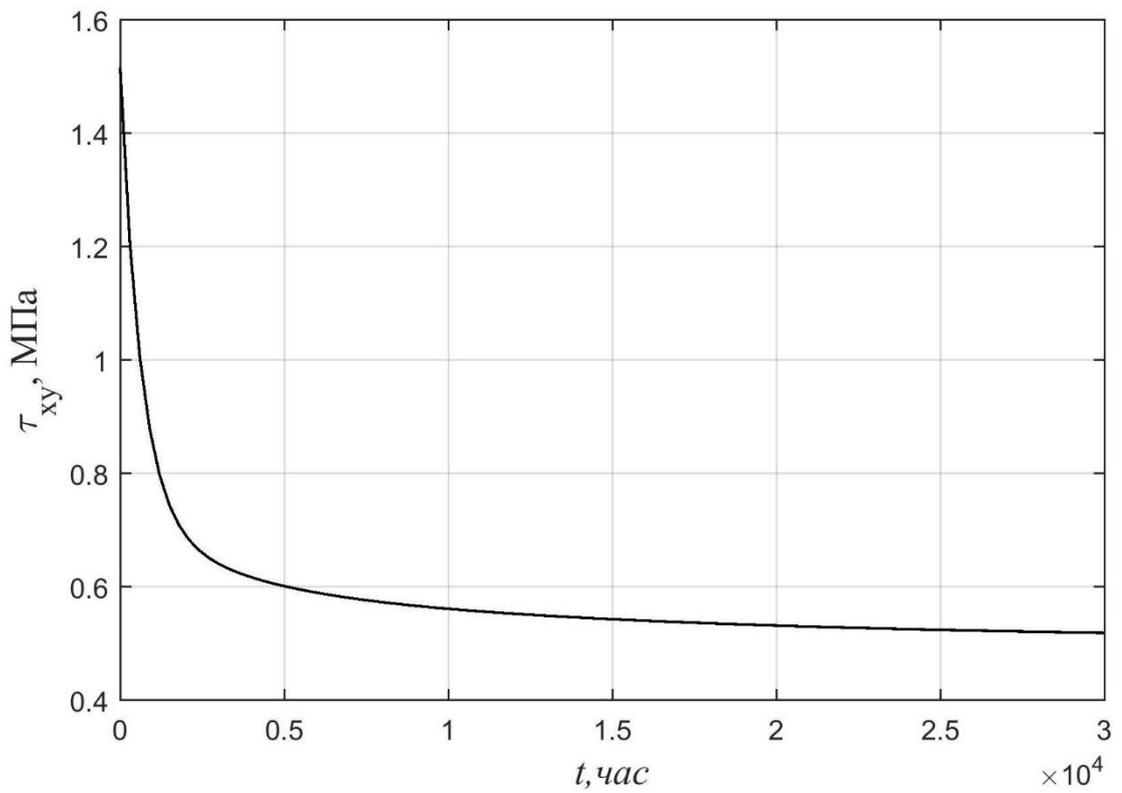


Рис. 3.5 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений τ_{xy}

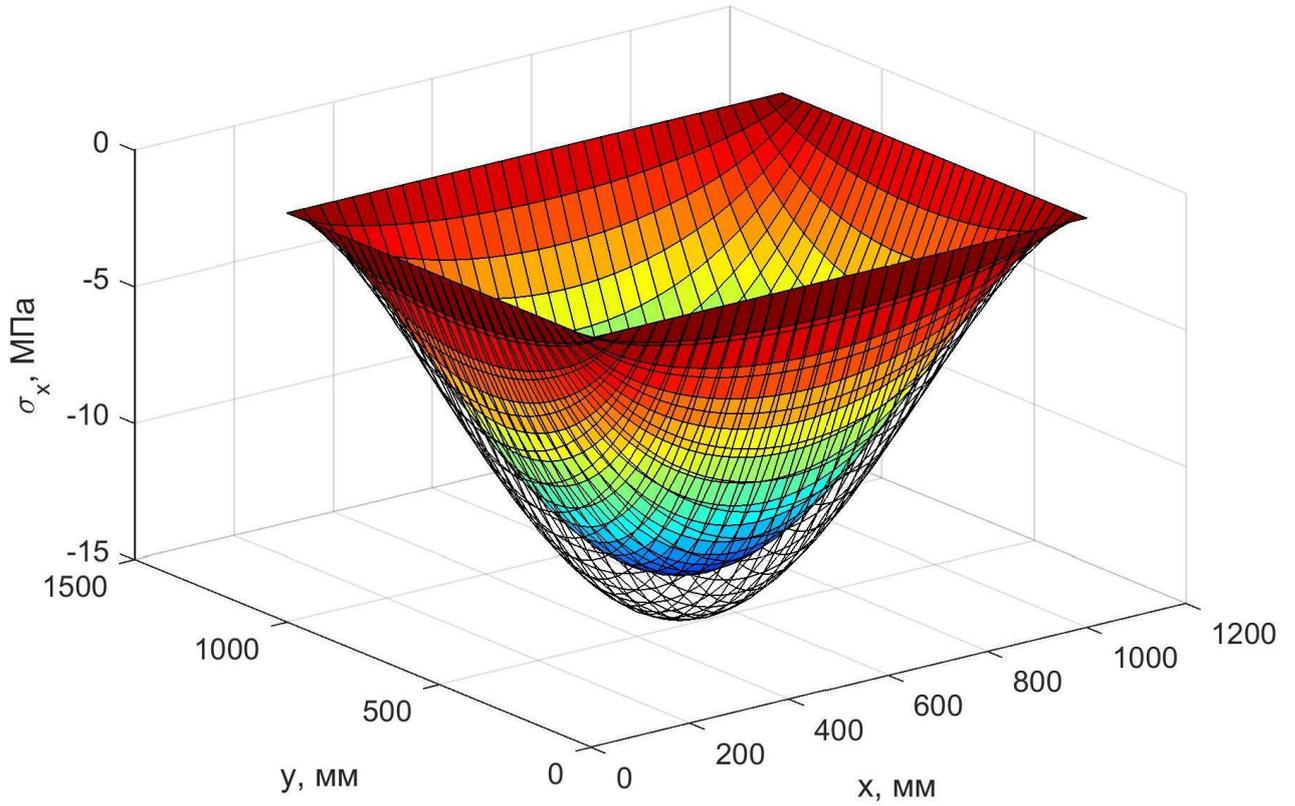


Рис. 3.6 – Распределение напряжений σ_x у верхней поверхности пластины при $t = 0$ (закрашенная поверхность) и $t = 30\,000$ ч (сетчатая поверхность)

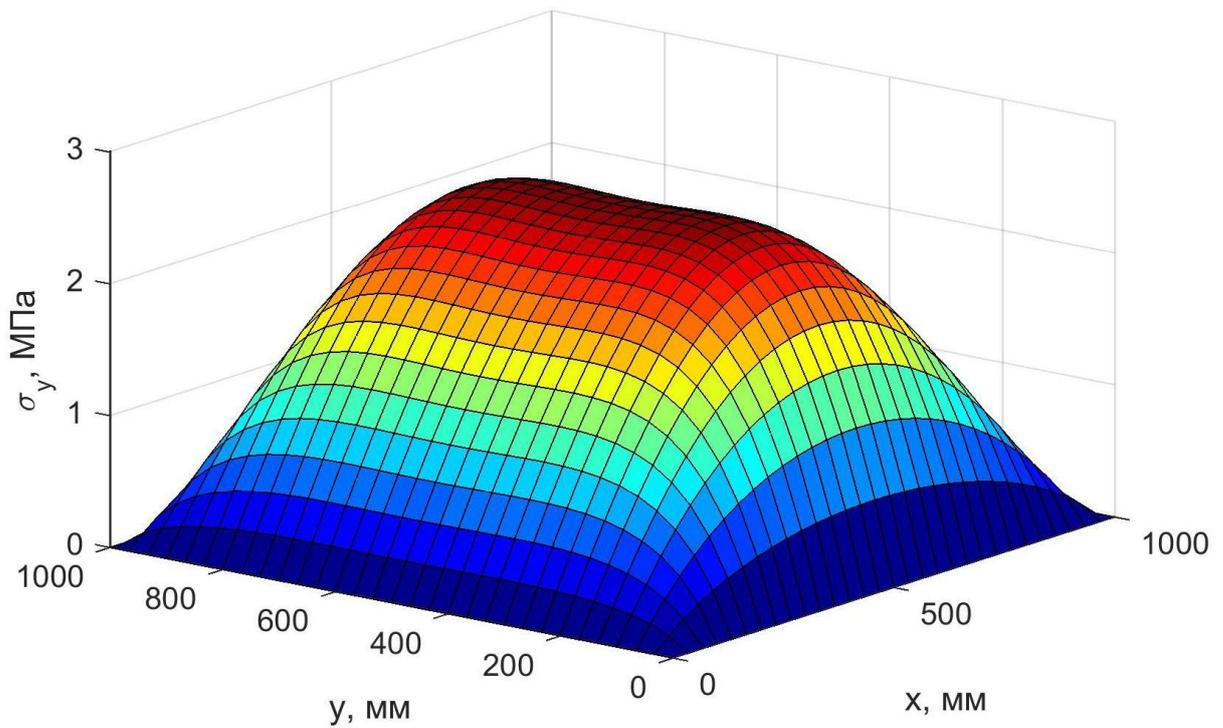


Рис. 3.7 – Распределение напряжений σ_y у нижней поверхности пластины при $t = 60\,000$ ч

Из рис. 3.7, во-первых, видно, что наибольшие напряжения σ_y возникают не в центре пластины, а во-вторых, несмотря на то что пластина квадратная, наибольшие напряжения σ_x и σ_y за счёт ортотропии отличаются в 5.85 раз.

Распределение касательных напряжений при $t = 0$ и $t = 30\,000$ ч у нижней поверхности пластины приведено на рис. 3.8. Максимальные касательные напряжения в процессе ползучести снизились в 2.92 раза.

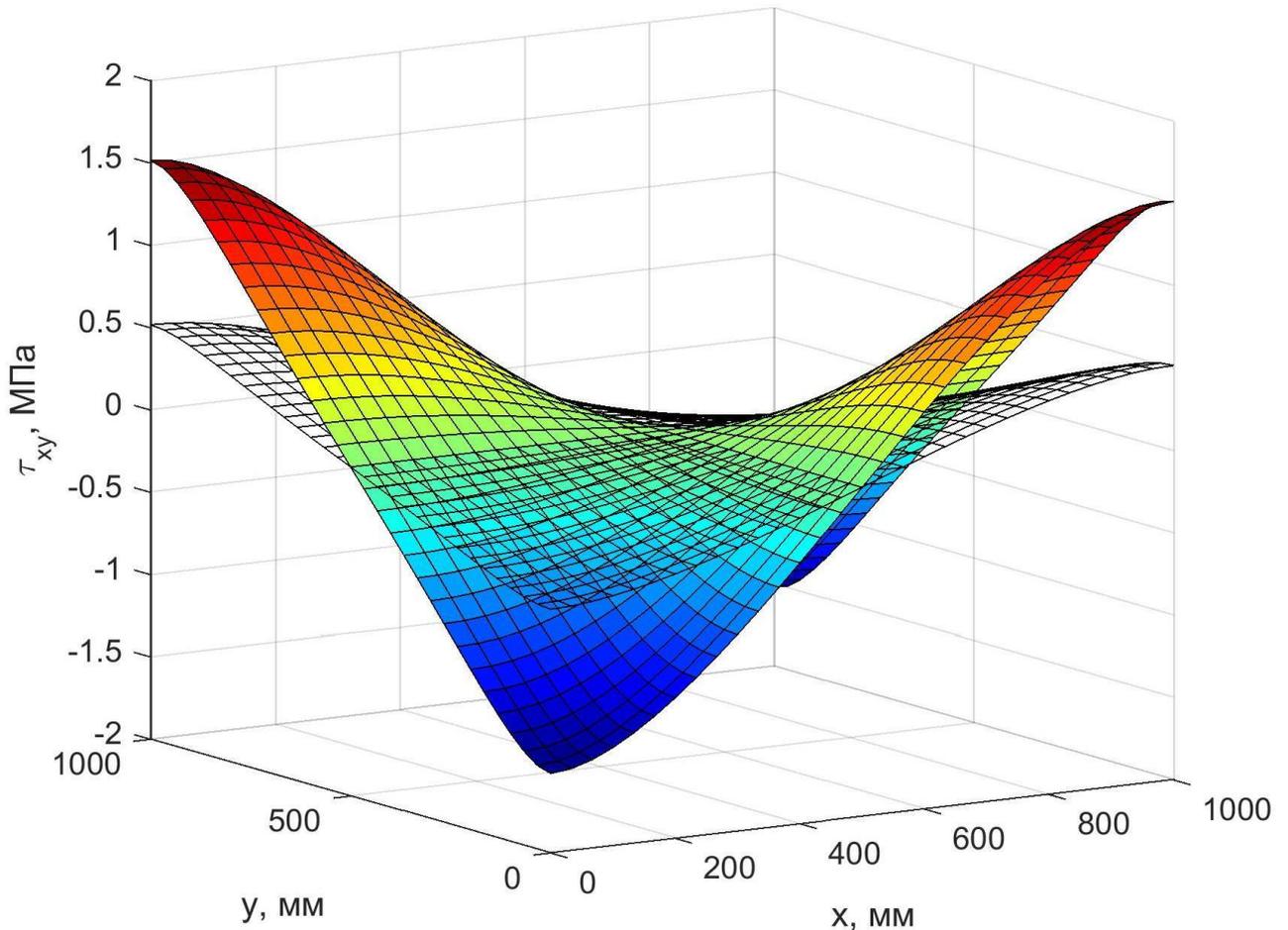


Рис. 3.8 – Распределение касательных напряжений при $t = 0$ (закрашенная поверхность) и $t = 30\,000$ ч (сетчатая поверхность)

Для рассмотренного в данном параграфе закона деформирования при ядре в виде суммы экспонент можно получить напряжения и перемещения в конце процесса ползучести, не прибегая к шаговому расчету. Для этого проанализируем уравнения (3.13) и (3.16) при $t \rightarrow \infty$. Поскольку ползучесть носит затухающий характер, в конце процесса равны нулю скорости роста всех составляющих высокоэластических деформаций:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{iy}^*}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 &\Rightarrow \beta_{2i} \left(\frac{\lambda_2}{3} \sigma_y - \varepsilon_{iy}^* \right) = 0 \Rightarrow \varepsilon_{iy}^* \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\lambda_2}{3} \sigma_y; \\ \varepsilon_y^* \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{iy}^* = \lambda_2 \sigma_y. \\ \frac{\partial \gamma_{xy,i}^*}{\partial t} \Big|_{t \rightarrow \infty} = 0 &\Rightarrow 2\beta_{4i} \left(\frac{2\lambda_4}{3} \tau_{xy} - \gamma_{xy,i}^* \right) = 0 \Rightarrow \gamma_{xy,i}^* \Big|_{t \rightarrow \infty} = \frac{2\lambda_4}{3} \tau_{xy}. \\ \gamma_{xy}^* \Big|_{t \rightarrow \infty} &= \sum_{i=1}^3 \gamma_{xy,i}^* = 2\lambda_4 \tau_{xy}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

С учетом (3.17) связь между деформациями и напряжениями при $t \rightarrow \infty$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= I_{1111} \sigma_x + I_{1122} \sigma_y; \\ \varepsilon_y &= I_{1122} \sigma_x + (I_{2222} + \lambda_2) \sigma_y; \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} &= (\lambda_4 + 2I_{1212}) \tau_{xy}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Соотношения (3.18) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_{1,\infty}} - \nu_{2,\infty} \frac{\sigma_y}{E_{2,\infty}}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_{2,\infty}} - \nu_{1,\infty} \frac{\sigma_x}{E_{1,\infty}}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_\infty}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

где

$$\begin{aligned} E_{1,\infty} = E_1 &= \frac{1}{I_{1111}}; \quad E_{2,\infty} = \frac{1}{I_{2222} + \lambda_2}; \quad G_\infty = \frac{1}{2(\lambda_4 + 2I_{1212})}; \\ \nu_{1,\infty} = \nu_1 &= -\frac{I_{1122}}{I_{1111}}; \quad \nu_{2,\infty} = -\frac{I_{1122}}{I_{2222} + \lambda_2}. \end{aligned}$$

Таким образом, чтобы получить напряжения и перемещения в конце процесса ползучести, достаточно мгновенные упругие постоянные $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2, G$ заменить на длительные $E_{1,\infty}, E_{2,\infty}, \nu_{1,\infty}, \nu_{2,\infty}, G_\infty$.

3.3 Плоская задача для ортотропной вязкоупругой пластины

Для ортотропной пластины вместо приведенных в главе 2 физических уравнений (2.61) необходимо использовать следующие соотношения:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_1} - \nu_2 \frac{\sigma_y}{E_2} + \varepsilon_x^* = \frac{1}{E_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\nu_2}{E_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \varepsilon_x^*; \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_2} - \nu_1 \frac{\sigma_x}{E_1} + \varepsilon_y^* = \frac{1}{E_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\nu_1}{E_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \varepsilon_y^*; \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx \right) + \gamma_{xy}^*.\end{aligned}\quad (3.20)$$

Подставив (3.20) в уравнение совместности деформаций (2.62) при $X = const$ и $Y = const$, получим:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{1}{G} - \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^*}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varepsilon_x^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_y^*}{\partial x^2}.\quad (3.21)$$

При $t = 0$ уравнение (3.21) принимает вид:

$$\frac{1}{E_1} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \left(\frac{1}{G} - \frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2} \right) = 0.\quad (3.22)$$

В данное уравнение, в отличие от (2.69), входят упругие постоянные, следовательно распределение напряжений в начале и в конце процесса ползучести будет различным.

При расчете методом конечных элементов можно использовать уравнения, приведенные в параграфе (2.5), достаточно заменить в них матрицу $[D]$ для изотропного материала на следующую:

$$[D] = \frac{1}{1 - \nu_1 \nu_2} \begin{bmatrix} E_1 & E_1 \nu_2 & 0 \\ E_2 \nu_1 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & G(1 - \nu_1 \nu_2) \end{bmatrix}.\quad (3.23)$$

Был выполнен расчет пластинки из стеклопластика ВПС-48/120 с упругими и реологическими характеристиками, приведенными в табл. 3.1. Размеры были приняты такие же, как в параграфе 2.5. Величина нагрузки $q = 10$ МПа. Результаты расчета приведены на рис. 3.9 – рис. 3.18.

График роста наибольшей величины перемещений u приведен на рис. 3.9. Перемещения по x процессе ползучести выросли в 1.89 раз. Их распределение при $t = 0$ и $t = 50\,000$ ч приведено на рис. 3.10. Рис. 3.11 – то же для перемещений по y . Деформированная схема в начале и в конце процесса ползучести показана на рис. 3.12.

Графики изменения во времени наибольших величин напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} приведены соответственно на рис. 3.13 – рис. 3.15. Из представленных графиков видно, что в процессе ползучести происходит существенное перераспределение напряжений: наибольшие напряжения σ_x выросли на 62%, σ_y – на 30.3%, а касательные напряжения снизились на 36.1%. Распределение напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в зависимости от x и y при $t = 50\,000$ ч приведено соответственно на рис. 3.16 – рис. 3.18.

Для ортотропной пластинки по сравнению с изотропной наблюдается более выраженная концентрация напряжений. Коэффициент концентрации при $t = 50\,000$ ч составил 12.6.

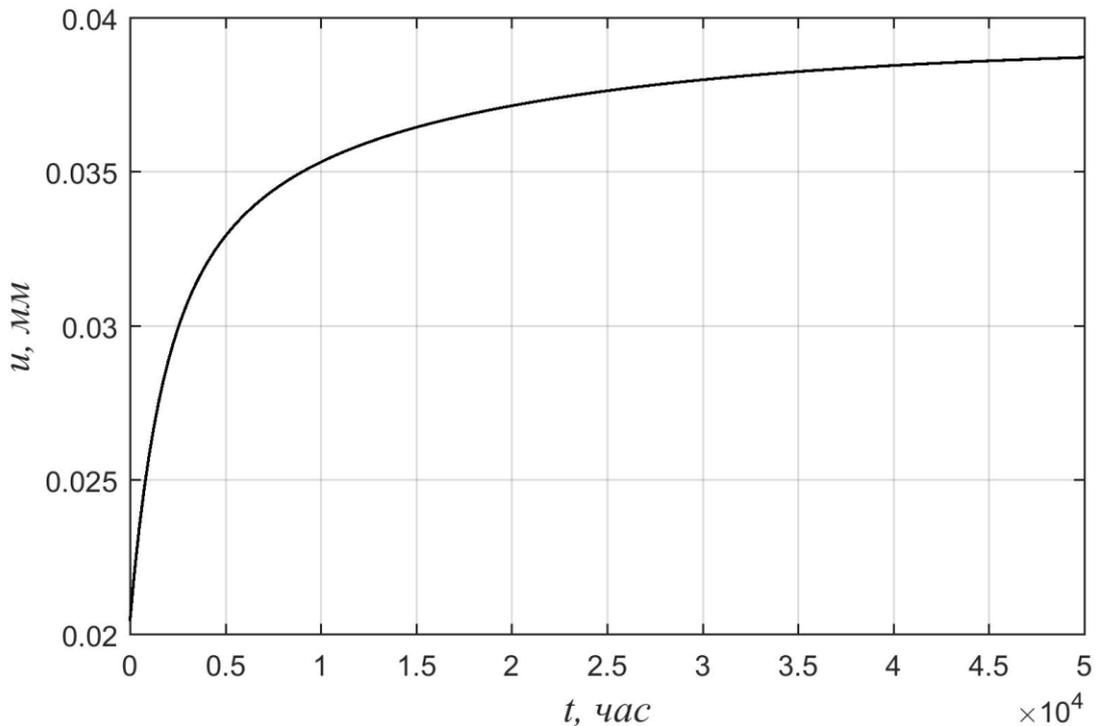


Рис. 3.9 – Рост наибольшей величины перемещений во времени

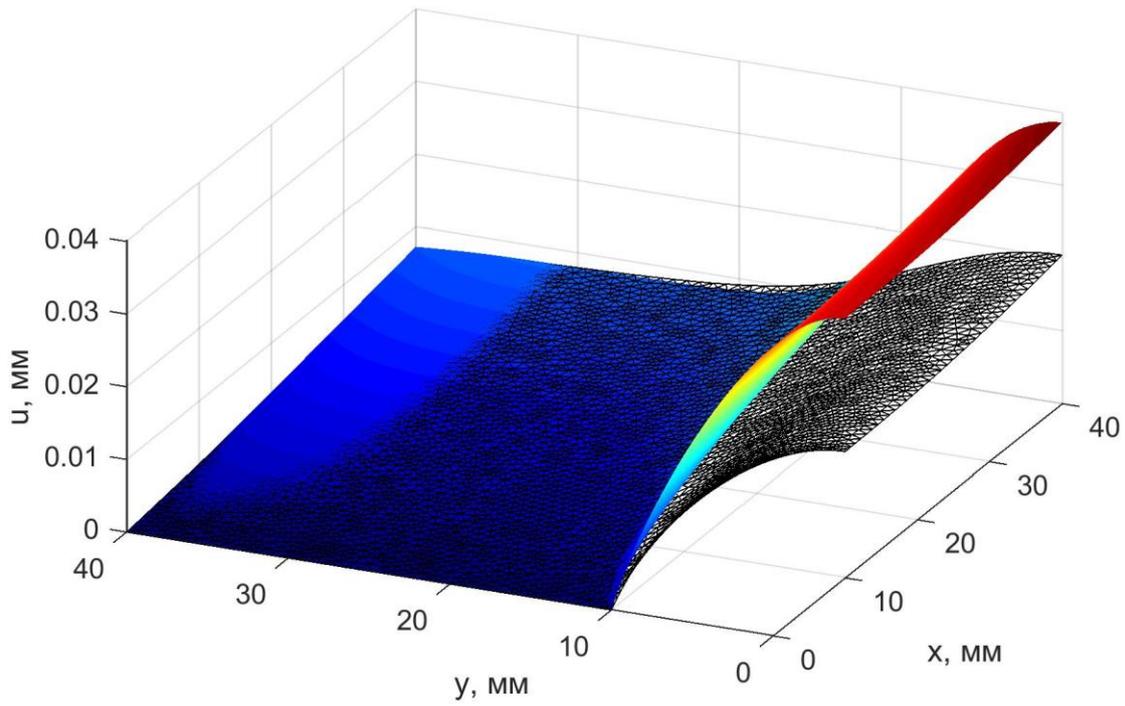


Рис. 3.10 – Распределение перемещений u в при $t = 0$ (сетчатая поверхность) и $t = 50\,000$ ч (закрашенная поверхность)

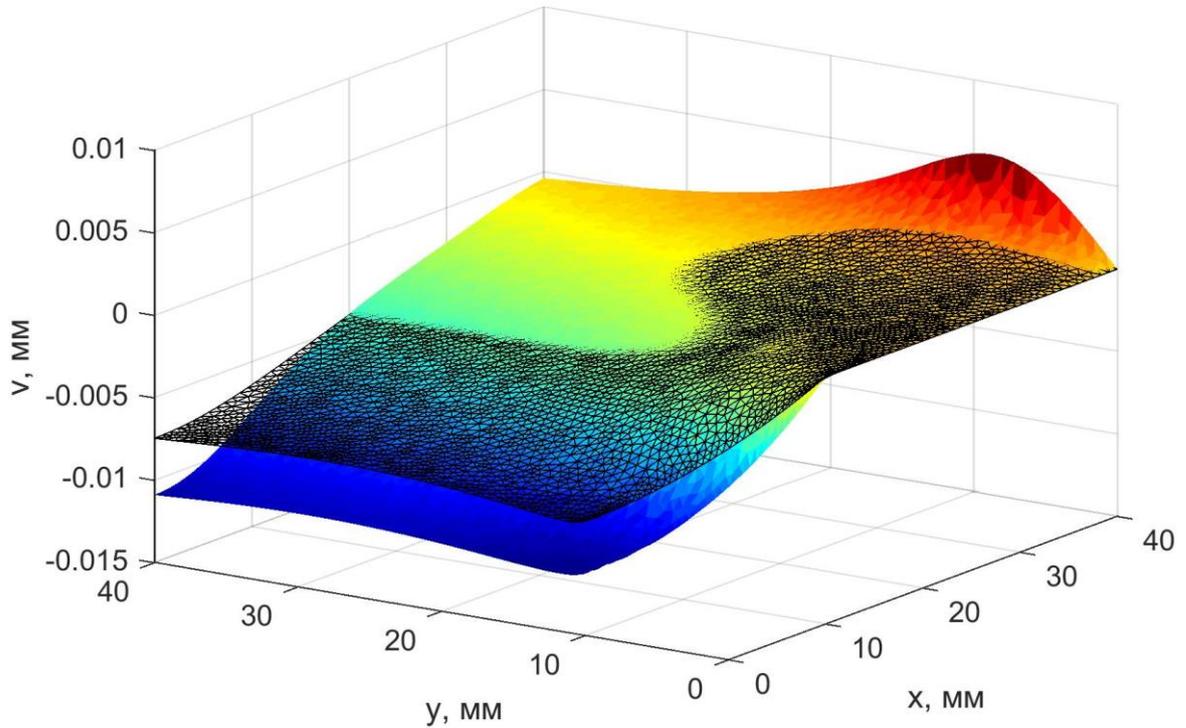


Рис. 3.11 – Распределение перемещений v в при $t = 0$ (сетчатая поверхность) и $t = 50\,000$ ч (закрашенная поверхность)

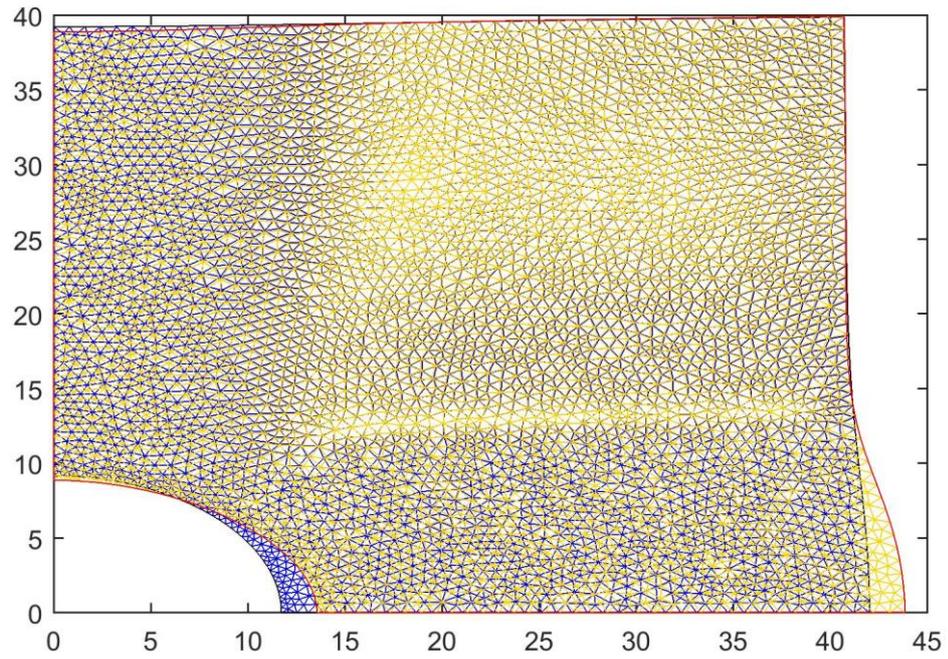


Рис. 3.12 – Деформированная схема при $t = 0$ и $t = 50\,000$ ч

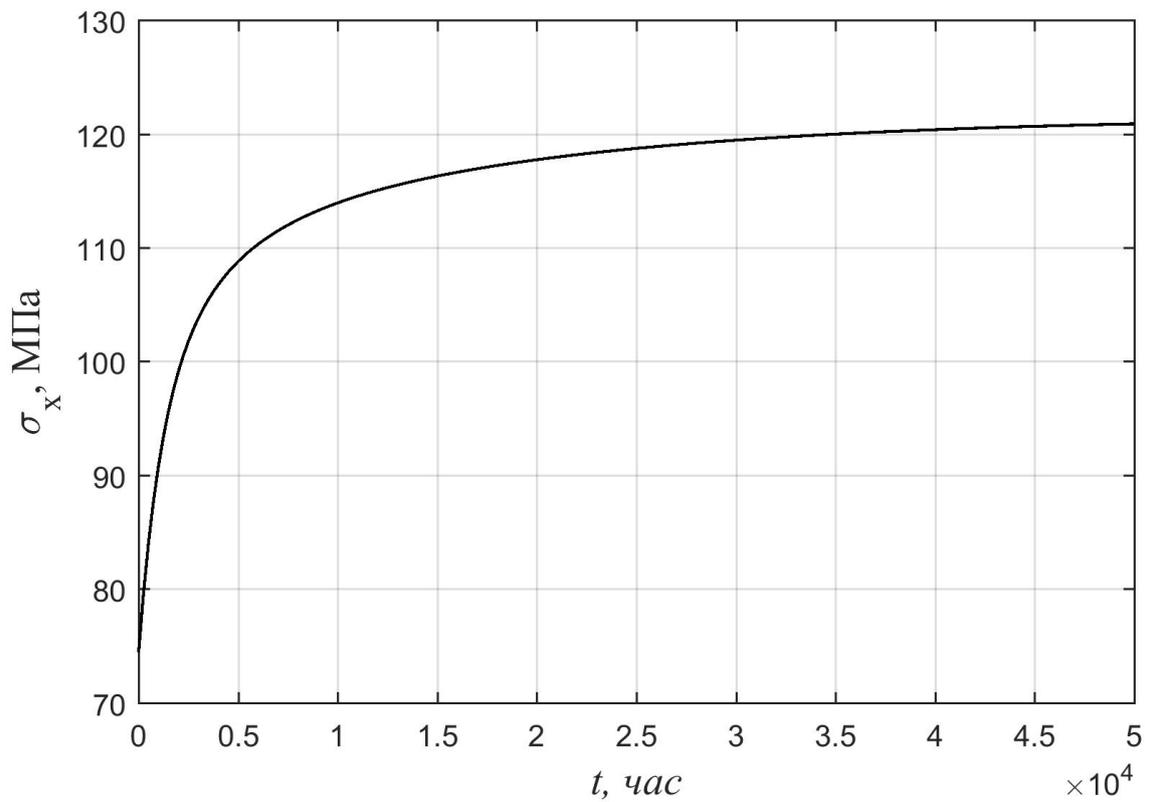


Рис. 3.13 – Изменение во времени наибольших напряжений σ_x

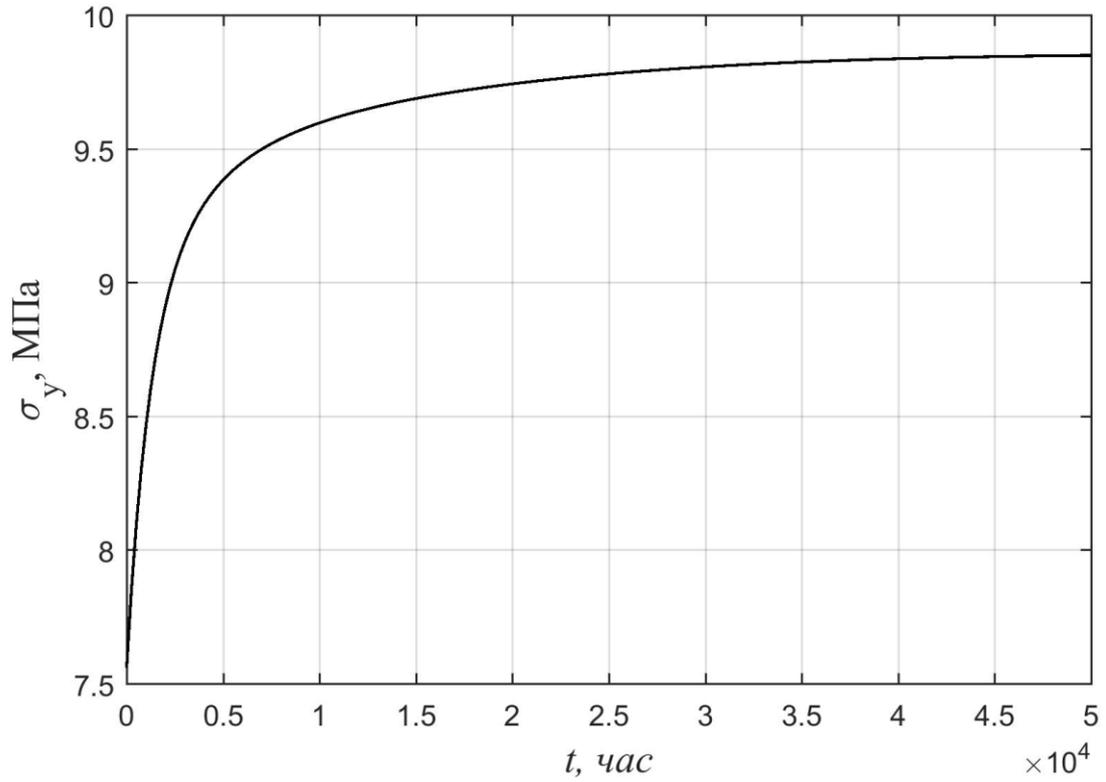


Рис. 3.14 – Изменение во времени наибольших напряжений σ_y

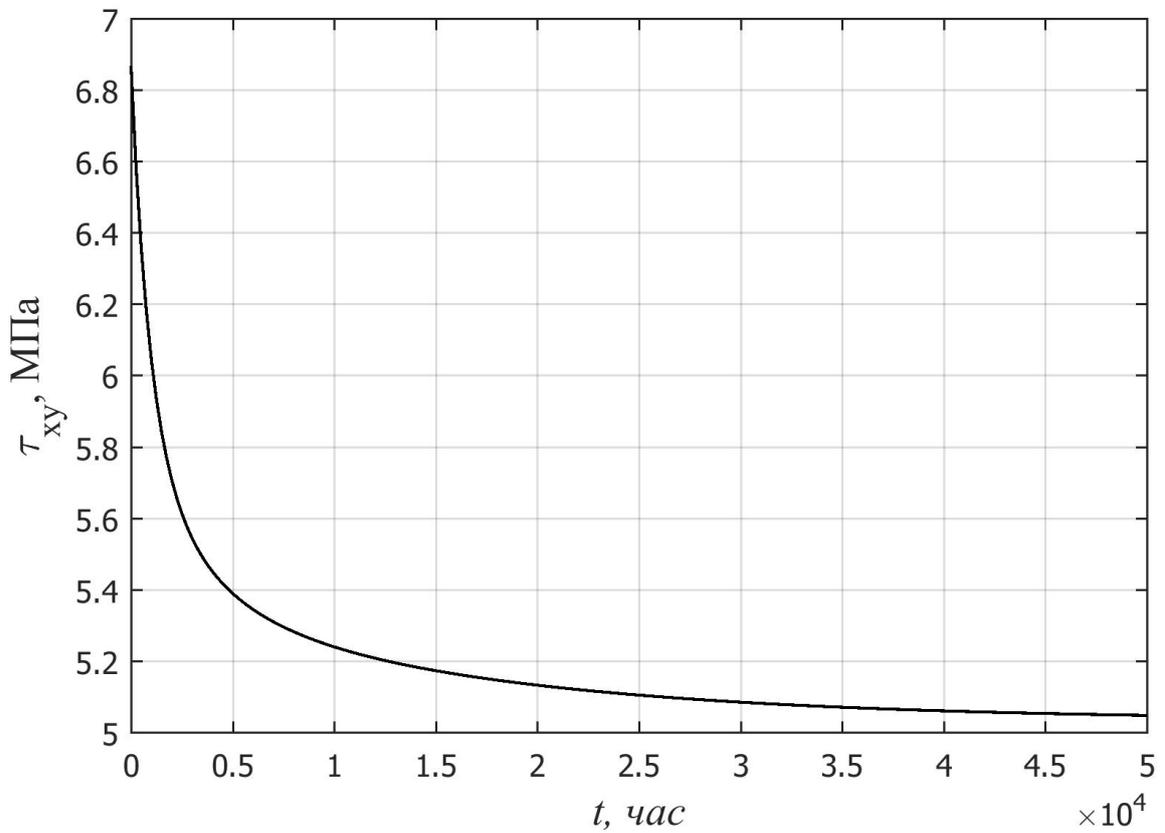


Рис. 3.15 – Изменение во времени наибольших касательных напряжений

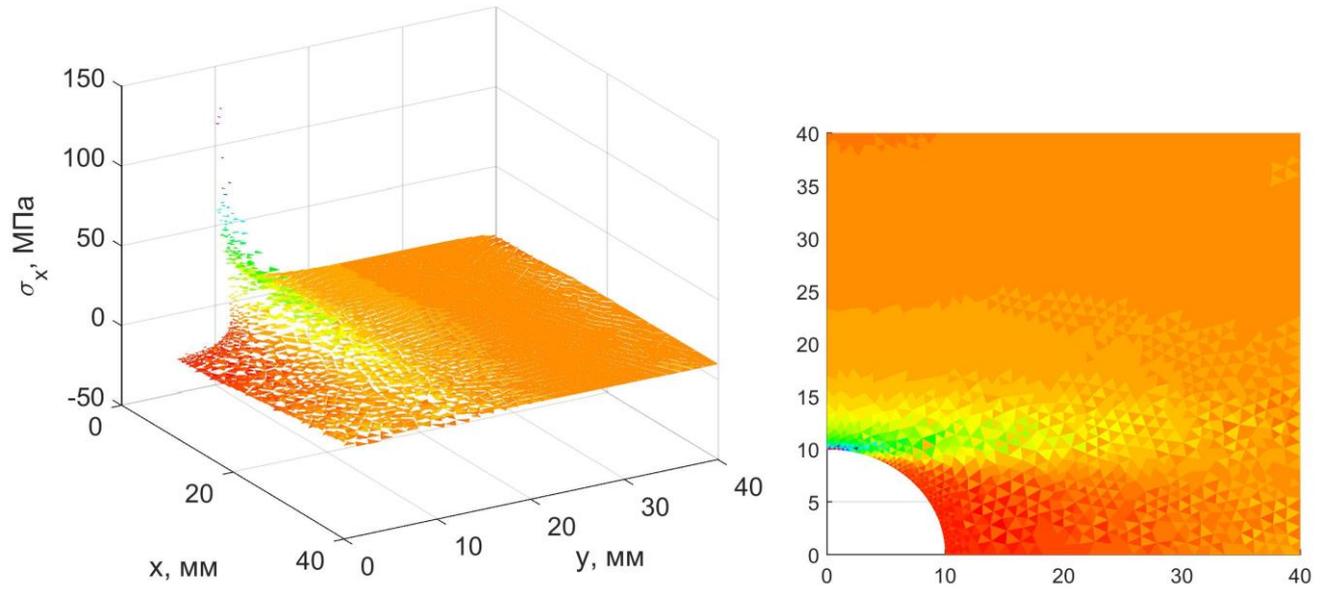


Рис. 3.16 – Распределение напряжений σ_x в зависимости от x и y при $t = 50\,000$ ч

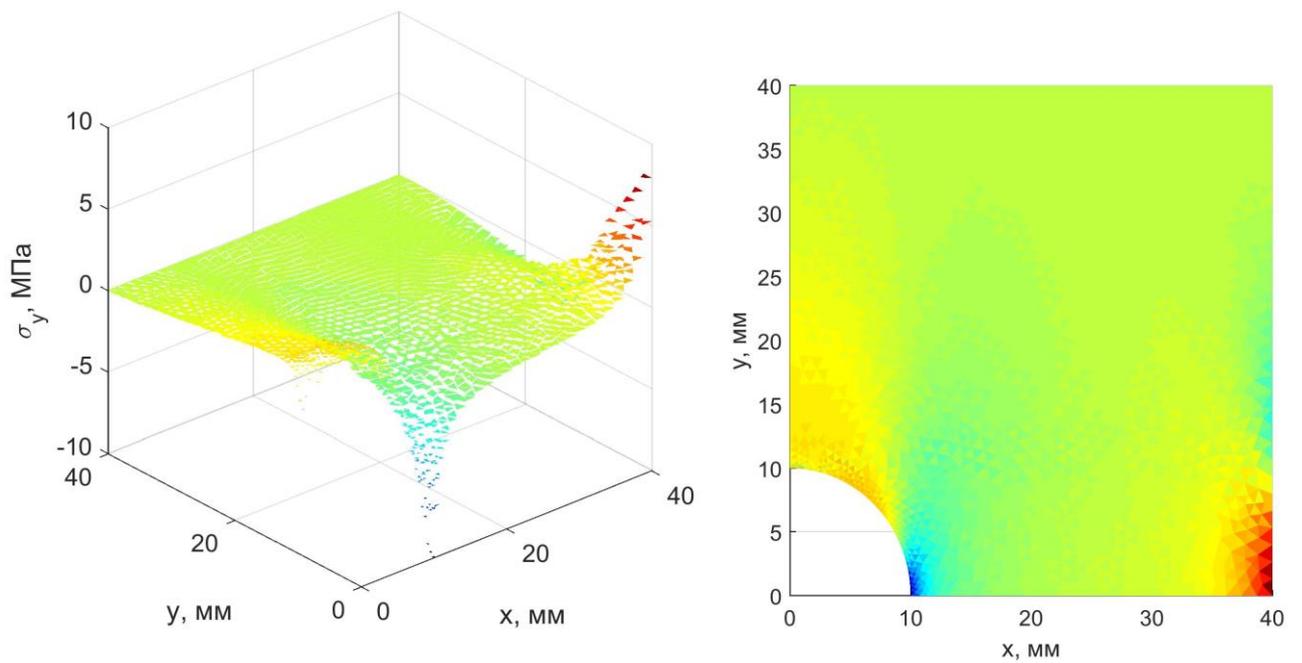


Рис. 3.17 – Распределение напряжений σ_y в зависимости от x и y при $t = 50\,000$ ч

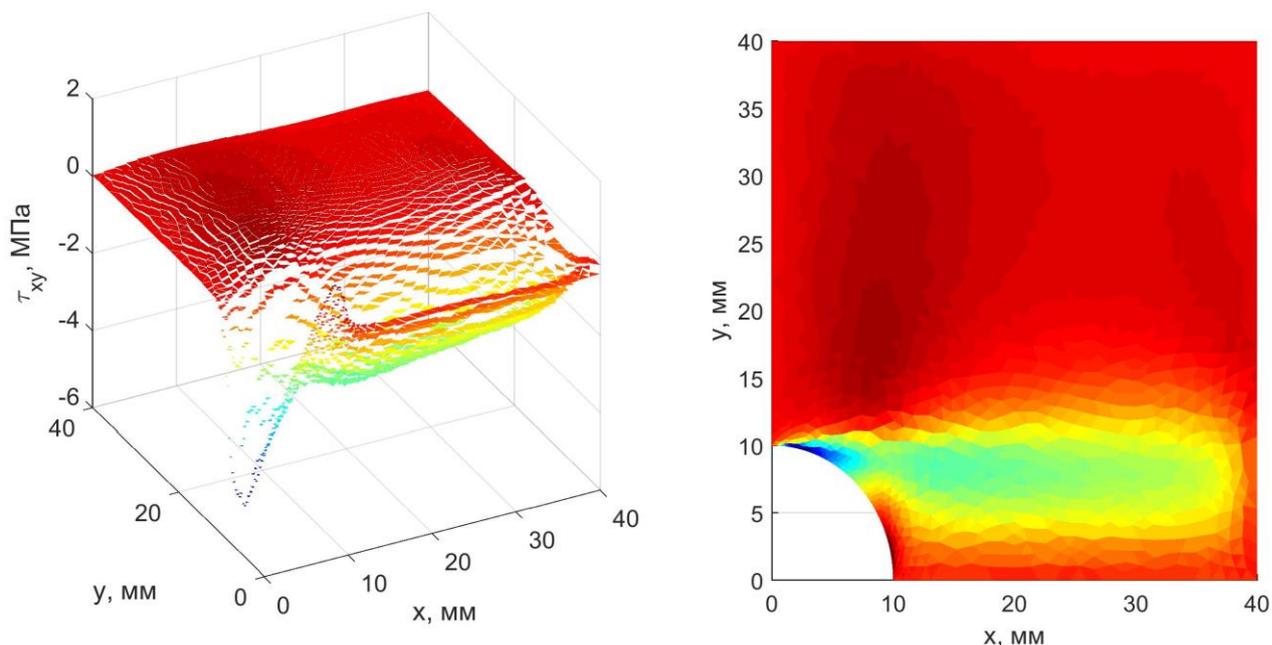


Рис. 3.18 – Распределение касательных напряжений в зависимости от x и y при $t = 50\,000$ ч

3.4 Выводы по главе

Получены разрешающие уравнения для расчета на изгиб с учетом ползучести ортотропных пластин из армированных полимеров. Рассмотрена задача изгиба композитной пластинки на примере стеклопластика ВПС-48/120. Установлено, что для ортотропной пластинки, в отличие от изотропной, происходит перераспределение напряжений: напряжения σ_x возрастают, а касательные напряжения убывают.

Произведен вывод разрешающих уравнений для ортотропной вязкоупругой пластины, находящейся в условиях плоского напряженного состояния. Рассмотрена задача растяжения полосы с отверстием на примере стеклопластика ВПС-48/120. Выявлено существенное перераспределение напряжений: нормальные напряжения σ_x и σ_y возрастают, а напряжения τ_{xy} убывают. Получены выражения для длительных упругих постоянных, что позволяет найти решение задачи в конце процесса ползучести теми же методами, что и упругое решение.

ГЛАВА 4. РАСЧЕТ ТРЕХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН С ЛЕГКИМ ПОЛИМЕРНЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

4.1 Определение реологических параметров жесткого пенополиуретана при сдвиговой ползучести

Для определения реологических параметров пенополиуретана, используемого в качестве заполнителя трехслойных конструкций, нами были проведены испытания данного материала на ползучесть при сдвиге. Схема испытательной установки и ее фото показаны на рис. 4.1.

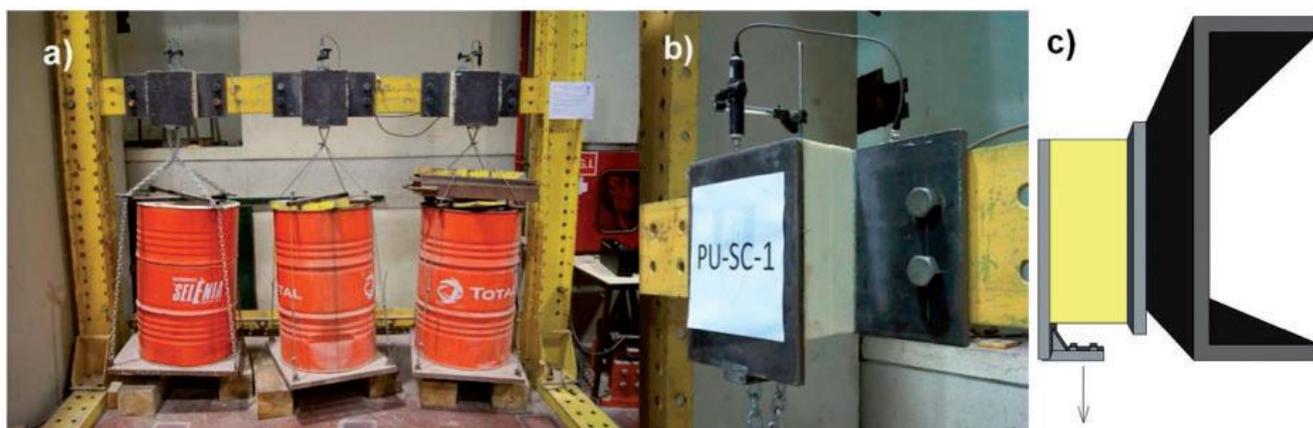


Рис. 4.1 – Установка для испытаний на сдвиговую ползучесть: (а) – общий вид; (b) – образец под нагрузкой, адгезионно связанный с двумя стальными пластинами; (с) – схема приложения статической нагрузки

Испытания проводились в течение 1200 ч для трех различных уровней нагрузки, соответствующих 10%, 20% и 30% от предела прочности материала. Образцы из жесткого двухкомпонентного пенополиуретана (PUR) (производитель компонентов Dow Chemical) размером 250x250x90 мм с одной стороны прикреплялись к балке стальной рамы, а с противоположной стороны через стальную пластину прикладывалась вертикальная нагрузка, величина которой регулировалась путем изменения уровня воды в бочках. Перемещения нагруженной пластины замерялись с точностью 0.01 мм. Деформация сдвига вычислялась как отношение вертикального перемещения δ_v к толщине образца h .

В табл. 4.1 представлены усредненные значения сдвиговой деформации ползучести γ^* в различные моменты времени при $\tau = 28.2 \cdot 10^{-3}$ МПа, что составляет 10% от предела прочности материала τ_{ult} . Величина γ^* определялась как разность между полной и упругой деформацией:

$$\gamma^* = \gamma - \frac{\tau}{G}. \quad (4.1)$$

Для мгновенного модуля сдвига G было получено значение 4.85 МПа.

Табл. 4.1 – Величины сдвиговой деформации ползучести в различные моменты времени при $\tau = 0.1\tau_{ult}$

$t, \text{ч}$	26	40	52	70	98	116	146	170	240	265	288	315
$\gamma^* \cdot 10^{-3}$	1.33	1.44	1.54	1.63	1.75	1.85	1.91	1.97	2.19	2.22	2.27	2.35
$t, \text{ч}$	405	452	505	570	625	673	747	770	840	940	1130	
$\gamma^* \cdot 10^{-3}$	2.49	2.56	2.69	2.71	2.73	2.78	2.84	2.85	2.95	2.98	3.09	

Аналогичные испытания проводились португальскими учеными [66, 67]. Для описания кривых ползучести они использовали степенной закон Финдли:

$$\gamma(\tau, t) = \tau \left(\frac{1}{G_e} + \frac{1}{G_t} t^n \right), \quad (4.2)$$

где G_e и G_t – соответственно упругий и вязкоупругий модуль сдвига материала.

Вместо величин G_e и G_t можно ввести зависящий от времени модуль сдвига по формуле:

$$G(t) = \frac{\tau}{\gamma(\tau, t)} = \left(\frac{1}{G_e} + \frac{1}{G_t} t^n \right)^{-1} = \frac{G_e G_t}{G_t + G_e t^n}. \quad (4.3)$$

В работе [67] приводится следующая эмпирическая формула вида (4.3):

$$G(t) = \frac{210.57}{43.35 + 4.86t^{0.25}}. \quad (4.4)$$

Существенным недостатком закона Финдли является то, что время включено в него в явном виде. Вследствие этого данный закон применим только при простом

нагрузении, когда нагрузка во времени постоянна. При наличии температурного поля оно также должно быть стационарным.

Указанных недостатков лишено нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. В работах [53, 68, 69, 57] приводится методика получения реологических параметров, входящих в данное уравнение, по кривым релаксации при одноосном растяжении. В настоящей диссертации рассмотрим методику обработки кривых ползучести полимеров при чистом сдвиге.

Скорость роста сдвиговой деформации ползучести определяется следующим образом:

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} = \left(\frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* \right) \frac{1}{\eta^*}. \quad (4.5)$$

$$\text{Здесь } \varepsilon_{xz}^* = \frac{1}{2} \gamma_{xz}^*; \quad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|f^*|}{m^*}\right); \quad f^* = \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^*.$$

Величины γ_{xz}^* можно определить по формуле (4.1). Если ползучесть носит затухающий характер, то при $t \rightarrow \infty$ равна нулю скорость роста деформации ползучести:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} \right|_{t \rightarrow \infty} = 0 \rightarrow \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* = 0. \quad (4.6)$$

Зная деформацию в конце процесса ползучести, из (4.6) можно определить модуль высокоэластичности:

$$E_{\infty} = \frac{\frac{3}{2} \tau_{xz}}{\varepsilon_{xz}^*|_{t \rightarrow \infty}} = \frac{3 \tau_{xz}}{\gamma_{xz}^*|_{t \rightarrow \infty}}. \quad (4.7)$$

Соотношение для релаксационной вязкости запишем в виде:

$$\eta^* = \eta_0^* e^{-\frac{|f^*|}{m^*}}. \quad (4.8)$$

Прологарифмируем равенство (4.8):

$$\ln \eta^* = \ln \eta_0^* - \frac{|f^*|}{m^*}. \quad (4.9)$$

Таким образом, между величинами $y = \ln \eta^*$ и $x = |f^*|$ существует линейная зависимость:

$$y = ax + b, \quad (4.10)$$

где $a = -1/m^*$, $b = \ln \eta_0^*$.

После определения модуля высокоэластичности, можно найти функцию напряжений f^* в каждый момент времени. Для вычисления значений η^* в каждой точке временного интервала необходимо знать величины $v_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t}$. Таким образом, функцию $\varepsilon_{xz}^*(t)$ необходимо численно продифференцировать по времени. Данная задача осложняется тем, что измерения, как правило, выполняются через неравные промежутки времени. Для дифференцирования через каждую точку и две смежные с ней проводится квадратная парабола:

$$\varepsilon^*(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2. \quad (4.11)$$

Производная выражения (4.11) записывается в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = k_2 + 2k_3 t. \quad (4.12)$$

Коэффициенты k_1, k_2, k_3 определяется при помощи функции *polyfit* пакета Matlab. Далее, вычислив значения v_ε , можно найти величины $\eta^* = f^*/v_\varepsilon$. Коэффициенты a и b , соответствующие величинам m^* и η_0^* , определяются путем аппроксимации кривой $y(x)$ прямой линией при помощи метода наименьших квадратов. Программа для обработки кривых ползучести в пакете Matlab приводится в приложении.

На рис. 4.2 представлены результаты обработки данных, приведенных в табл. 4.1. Красной линии соответствует кривая, полученная экспериментально, синяя линия – аппроксимация экспериментальной кривой на основе уравнения Максвелла-Гуревича, фиолетовая кривая построена на основе закона Финдли (4.2). Черной линией показана аппроксимация на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона, имеющего в случае чистого сдвига вид:

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial t} = \frac{1}{nG} \left(\left(1 - \frac{H}{G} \right) \tau - H\gamma^* \right), \quad (4.13)$$

где n – время релаксации, G и H – соответственно мгновенный и длительный модуль сдвига.

Введя обозначения $\eta^* = \frac{3nG}{1-H/G}$ и $E_\infty = \frac{3H}{1-H/G}$, уравнение (4.13) можно представить в виде (4.5). В отличие от нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича, в линейном уравнении релаксационная вязкость η^* является постоянной.

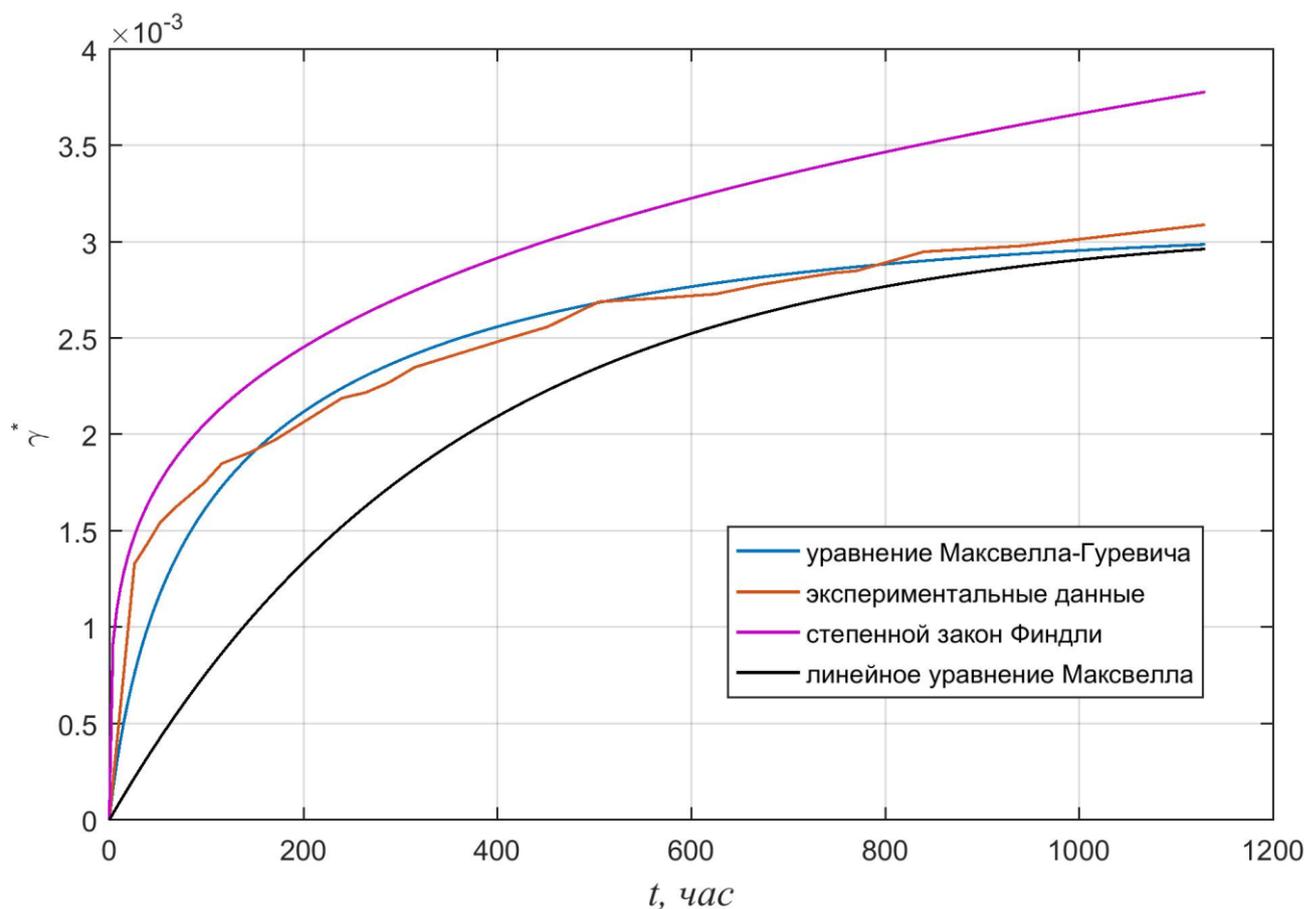


Рис. 4.2 – Экспериментальная кривая роста свдиговой деформации ползучести и ее аппроксимация

Из рис. 4.2 видно, что нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича лучше всего согласуется с экспериментальными данными. Степенной закон Финдли и линейное уравнение Максвелла дают весьма посредственные результаты.

В результате обработки данных, приведенных в табл. 4.1, получены следующие значения релаксационных констант: $E_\infty = 27.38$ МПа, $\eta_0^* = 1.43 \cdot 10^4$ МПа · ч, $m^* = 0.0218$ МПа. Для линейного уравнения время релаксации $n = 230.62$ ч, длительный модуль сдвига $H = 3.17$ МПа.

4.2 Расчет на ползучесть трехслойной балки с средним слоем из пенополиуретана

Прежде чем перейти к вопросам ползучести трехслойных пластин, исследуем более простой случай – трехслойную балку с вязкоупругим средним слоем. Рассмотрим шарнирно-опертую по концам балку, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой q (рис. 1).

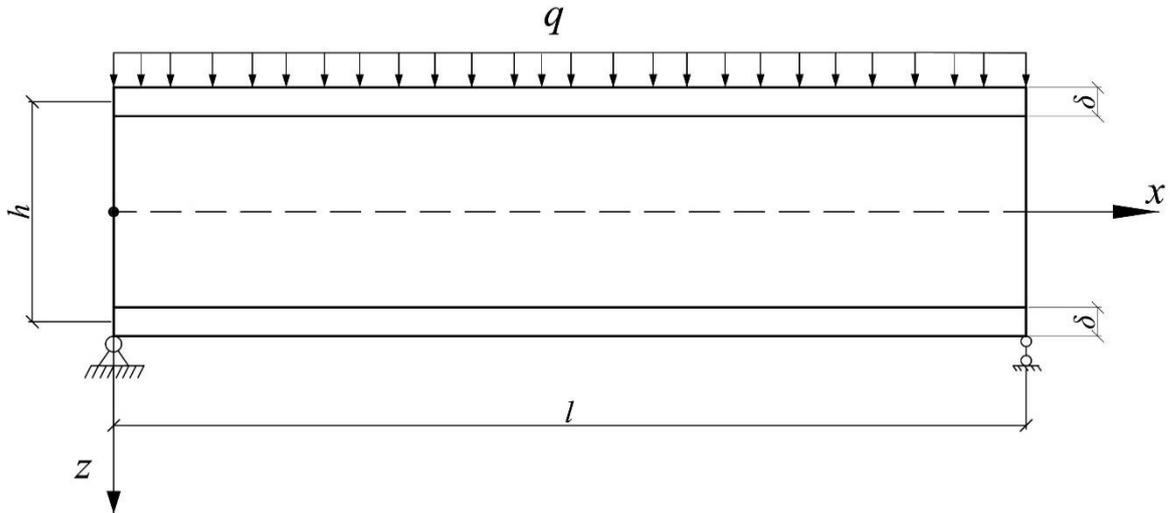


Рис. 4.3 – Расчетная схема трехслойной балки

При выводе уравнений принимаются следующие гипотезы:

1. Изгибающий момент полностью воспринимается обшивками.

Исходя из этой гипотезы, изгибающий момент связан с напряжениями в верхней и нижней обшивке следующим образом:

$$M(x) = \sigma_H b \delta \frac{h}{2} - \sigma_B b \delta \frac{h}{2} \quad (4.14)$$

где b – ширина балки, h – высота, δ – толщина обшивок.

Равенство (4.14) можно переписать в виде:

$$\frac{M(x)}{I} = \frac{\sigma_H - \sigma_B}{h}, \quad (4.15)$$

где $I = b \delta \frac{h^2}{2}$ – момент инерции обшивок.

2. Перемещения по толщине заполнителя распределены по линейному закону:

$$u_c(z) = \frac{u_B + u_H}{2} + \frac{u_H - u_B}{h} z, \quad (4.16)$$

где u_H и u_B – соответственно перемещения нижней и верхней обшивки.

3. Поперечная сила полностью воспринимается заполнителем, заполнитель работает только на сдвиг, и касательные напряжения по его толщине постоянны. Исходя из этой гипотезы, поперечная сила определяется следующим образом:

$$Q = \tau_c bh = G_3 \gamma_c^{el} bh, \quad (4.17)$$

где G_3 – модуль сдвига заполнителя, γ_c^{el} – упругая деформация сдвига заполнителя, представляющая разность между полной сдвиговой деформацией и деформацией ползучести:

$$\gamma_c^{el} = \gamma_c - \gamma_c^*. \quad (4.18)$$

Напряжения в обшивках связаны с перемещениями следующим образом:

$$\sigma_H = E \frac{\partial u_H}{\partial x}; \quad \sigma_B = E \frac{\partial u_B}{\partial x}, \quad (4.19)$$

где E – модуль упругости обшивок.

Подставив (4.19) в (4.15), получим:

$$\frac{M}{EI} = \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (u_H - u_B). \quad (4.20)$$

Перемещения и деформации заполнителя связаны соотношением Коши:

$$\gamma_c = \frac{\partial u_c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{u_H - u_B}{h} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.21)$$

Подставим (4.21) в (4.18), а затем (4.18) в (4.17):

$$Q = G_3 bh \left(\frac{u_H - u_B}{h} + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_c^* \right). \quad (4.22)$$

Согласно теореме Журавского, поперечная сила связана с интенсивностью равномерно распределенной нагрузки следующим образом:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -q. \quad (4.23)$$

Дифференцируя (4.22) по x , получим:

$$G_3 bh \left(\frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} (u_H - u_B) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial x} \right) = -q. \quad (4.24)$$

Подставив (4.20) в (4.24), получим основное разрешающее уравнение:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{M(x)}{EI} - \frac{q}{G_3 b h} + \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial x}. \quad (4.25)$$

Уравнение (4.25) решается численно методом конечных разностей. Изгибающий момент и поперечная сила для рассматриваемой балки определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} M(x) &= \frac{qx}{2}(l-x); \\ Q(x) &= \frac{ql}{2} - qx. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Граничные условия имеют вид $w_{x=0} = w_{x=l} = 0$. На первом этапе выполняется решение упругой задачи ($\gamma_c^* = 0$). Из формулы (4.17) следует, что для статически определимой балки касательные напряжения в процессе ползучести не меняются. Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, то зная деформацию ползучести и напряжение в текущий момент времени, можно определить скорость роста деформации ползучести и ее величину в момент времени $t + \Delta t$:

$$\gamma_c^*(t + \Delta t) = \gamma_c^*(t) + \frac{\partial \gamma_c^*}{\partial t} \Delta t. \quad (4.27)$$

Была решена тестовая задача для трехслойной балки с алюминиевыми обшивками при следующих исходных данных: пролет $l = 1.5$ м, модуль упругости обшивок $E = 0.71 \cdot 10^5$ МПа, ширина балки $b = 0.1$ м, толщина заполнителя $h = 0.06$ м, толщина обшивок $\delta = 1$ мм. Упругие и реологические параметры пенопласта были взяты из параграфа 4.1. На рис. 4.4 приведены графики роста прогиба при различной величине нагрузки q . Сплошным линиям соответствует результат с использованием уравнения Максвелла-Гуревича, штриховым – на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона.

Из представленных графиков видно, что при малых напряжениях результаты по линейной и нелинейной теории практически совпадают, но с ростом нагрузки наблюдается различие в характере кривых. По нелинейной теории при больших напряжениях рост прогиба и затухание скорости происходит быстрее. В конце

процесса ползучести прогиба, полученные по линейной и нелинейной теории, совпадают при любом уровне нагрузки.

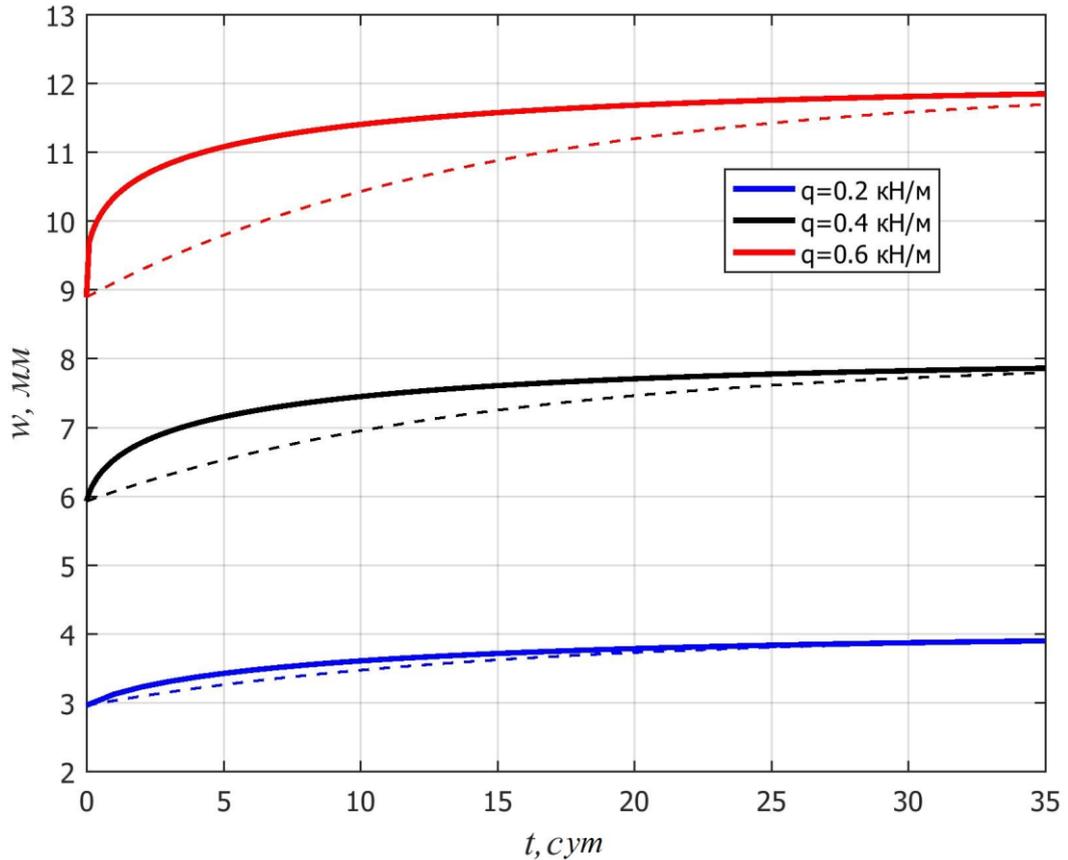


Рис. 4.4 – Графики роста прогиба при различной величине нагрузки q

Отметим, что при использовании законов ползучести (4.5) и (4.13) можно аналитически определить наибольший прогиб балки в конце процесса ползучести. Для этого сначала определим прогиб в середине пролета при $t = 0$. Дифференциальное уравнение (4.25) для начального момента времени запишется в виде:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \frac{qx}{2} (l-x) - \frac{q}{G_3A}, \quad (4.28)$$

где $A = bh$.

Интегрируя уравнение (4.28), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dx} &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{qx^2l}{4} - \frac{qx^3}{6} \right) - \frac{q}{G_3A} x + C_1, \\ w(x) &= -\frac{1}{EI} \left(\frac{qx^3l}{12} - \frac{qx^4}{24} \right) - \frac{q}{G_3A} \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из граничных условий:

$$w(0) = 0 \rightarrow C_2 = 0;$$

$$w(l) = 0: \quad -\frac{1}{EI} \left(\frac{ql^4}{12} - \frac{ql^4}{24} \right) - \frac{q}{G_3 A} \frac{l^2}{2} + C_1 l = 0 \rightarrow C_1 = \frac{ql}{2G_3 A} + \frac{ql^3}{24EI}. \quad (4.30)$$

Выражение для прогиба в середине пролета принимает вид:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{5ql^4}{384EI} + \frac{ql^2}{8G_3 A}. \quad (4.31)$$

При использовании уравнения (4.13) связь между полными деформациями сдвига и касательными напряжениями в заполнителе при $t \rightarrow \infty$ имеет вид:

$$\tau_c = H\gamma_c. \quad (4.32)$$

Таким образом, чтобы получить прогиб в конце процесса ползучести, достаточно в выражении (4.31) заменить мгновенный модуль сдвига заполнителя G_3 на длительный модуль H .

При использовании уравнения Максвелла-Гуревича длительный модуль сдвига можно вычислить по формуле:

$$H = \frac{GG_\infty}{G + G_\infty}, \quad (4.33)$$

где $G_\infty = E_\infty/3$.

Для подтверждения достоверности результатов был выполнен расчет в объемной постановке в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013. Обшивки балки моделировались плоскими оболочечными конечными элементами, а средний слой – трехмерными параллелепипедами. Расчет выполнялся при $q = 0.6$ кН/м, и в качестве модуля сдвига подставлялся длительный модуль H . По формуле (4.31) в этом случае прогиб в середине пролета составляет 12 мм. При решении методом конечных разностей в пакете Matlab получено значение $w_{max} = 11.9$ мм. В программном комплексе ЛИРА-САПР величина максимального прогиба также составила 11.9 мм. Изополя перемещений приведены на рис. 4.5.

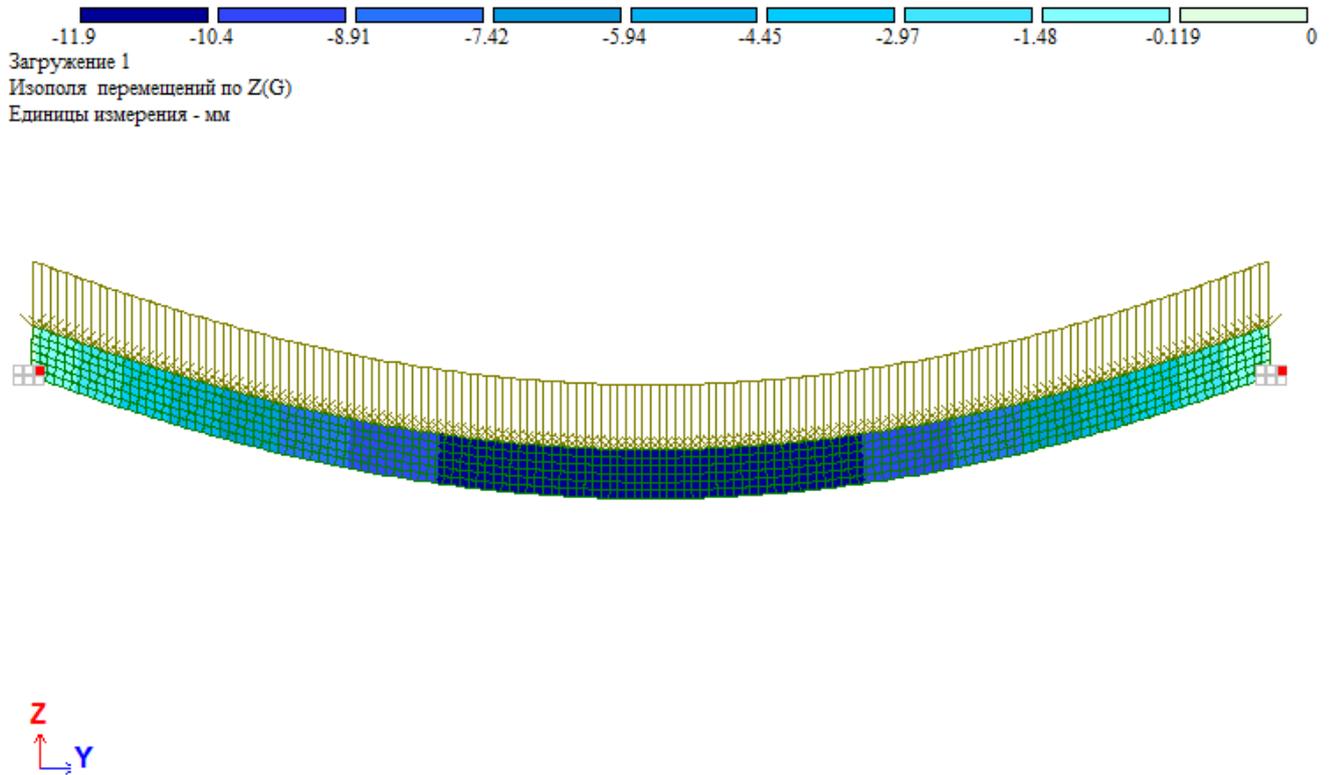


Рис. 4.5 – Изополя перемещений, полученные в программном комплексе ЛИРА-САПР

4.3 Вывод разрешающих уравнений для трехслойных пластин

Рассмотрим трехслойную пластину, общая толщина которой равна h , а толщина наружных слоев одинакова и равна t (рис. 4.6). При выводе разрешающих уравнений будем считать, что справедливы гипотезы, перечисленные в параграфе 4.2. Обозначим за u^B, v^B, w^B — перемещения точек верхней обшивки, u^H, v^H, w^H — перемещения нижней обшивки. Средний слой полагаем несжимаемым ($w^B = w^H = w$). Деформации верхнего и нижнего слоя определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^{B(H)} &= \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial x}; \\ \varepsilon_y^{B(H)} &= \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial y}; \\ \gamma_{xy}^{B(H)} &= \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial x}.\end{aligned}\tag{4.34}$$

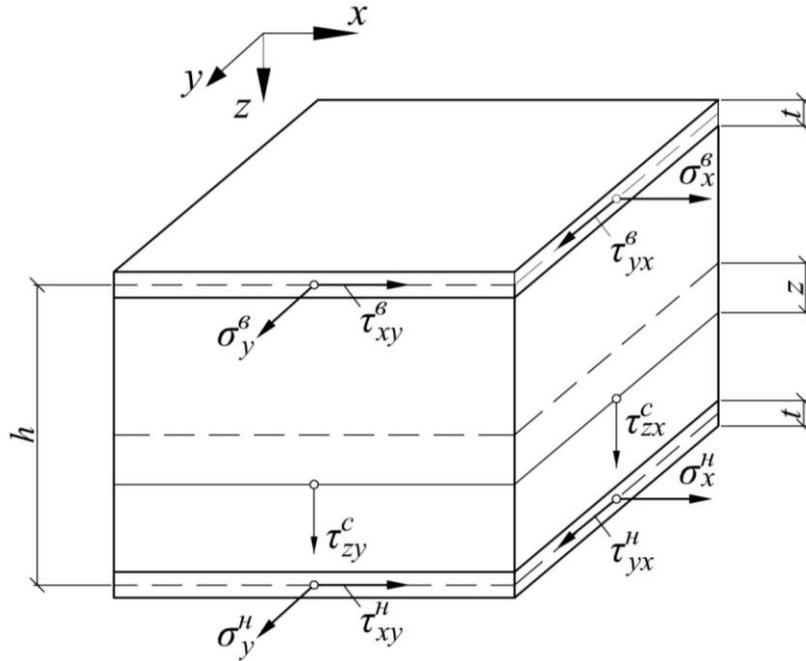


Рис. 4.6 – Элемент трехслойной пластины

Напряжения в обшивках запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x^{B(H)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x^{B(H)} + \nu \varepsilon_y^{B(H)}); \\ \sigma_y^{B(H)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y^{B(H)} + \nu \varepsilon_x^{B(H)}); \\ \tau_{xy}^{B(H)} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy}^{B(H)}.\end{aligned}\quad (4.35)$$

Как и для трехслойной балки, будем считать, что перемещения среднего слоя распределены по толщине по линейному закону:

$$\begin{aligned}u^c &= \frac{u_B + u_H}{2} + \frac{u_H - u_B}{h} z = u + \alpha z; \\ v^c &= \frac{v_B + v_H}{2} + \frac{v_H - v_B}{h} z = v + \beta z,\end{aligned}\quad (4.36)$$

где u и v – перемещения срединной плоскости.

Полные деформации сдвига заполнителя найдем, используя соотношения Коши:

$$\begin{aligned}\gamma_{zx}^c &= \frac{\partial u^c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \alpha + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \gamma_{zy}^c &= \frac{\partial v^c}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \beta + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Касательные напряжения в заполнителе с учетом ползучести запишутся в виде:

$$\begin{aligned}\tau_{zx}^c &= G_3(\gamma_{zx}^c - \gamma_{zx}^{c*}) = G_3\left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}^{c*}\right); \\ \tau_{zy}^c &= G_3(\gamma_{zy}^c - \gamma_{zy}^{c*}) = G_3\left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy}^{c*}\right).\end{aligned}\quad (4.38)$$

Внутренние усилия в пластине вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned}Q_x &= \tau_{zx}^c h = G_3 h \left(\alpha + \frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}^{c*}\right); \\ Q_y &= \tau_{zy}^c h = G_3 h \left(\beta + \frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy}^{c*}\right); \\ M_x &= (\sigma_x^H - \sigma_x^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x^H + \nu \varepsilon_y^H - \varepsilon_x^B - \nu \varepsilon_y^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u_H - u_B) + \nu \frac{\partial}{\partial y} (v_H - v_B) \right) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = D \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \nu \frac{\partial \beta}{\partial y} \right); \\ M_y &= (\sigma_y^H - \sigma_y^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = D \left(\nu \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right); \\ H &= (\tau_{xy}^H - \tau_{xy}^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{xy}^H - \gamma_{xy}^B) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = \\ &= \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u^H}{\partial y} + \frac{\partial v^H}{\partial x} - \left(\frac{\partial u^B}{\partial y} + \frac{\partial v^B}{\partial x} \right) \right) \cdot t \cdot \frac{h}{2} = \frac{D(1 - \nu)}{2} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial \beta}{\partial x} \right),\end{aligned}\quad (4.39)$$

где $D = \frac{Eth^2}{2(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость трехслойной пластины.

Подставим выражения для изгибающих и крутящего момента из (4.39) в уравнение равновесия (2.3):

$$\begin{aligned}D \left(\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} + (1 - \nu) \left(\frac{\partial^3 \alpha}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^2 \partial y} \right) + \frac{\partial^3 \beta}{\partial y^3} + \nu \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x \partial y^2} \right) = \\ = -q;\end{aligned}\quad (4.40)$$

$$D \nabla^2 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) = -q.$$

Выразим величины α и β из формул для поперечных сил в (4.39):

$$\alpha = \frac{Q_x}{G_3 h} - \frac{\partial w}{\partial x} + \gamma_{zx}^{c*};$$

$$\beta = \frac{Q_y}{G_3 h} - \frac{\partial w}{\partial y} + \gamma_{zy}^{c*}.$$
(4.41)

Подставив (4.41) в (4.40), получим основное разрешающее уравнение:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D} - \frac{1}{G_3 h} \nabla^2 q + \nabla^2 \left(\frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y} \right).$$
(4.42)

Решение уравнения (4.42) может быть выполнено методом конечных разностей. Данное уравнение позволяет определить только прогиб w , а для вычисления внутренних усилий необходимы также функции α и β . Чтобы получить разрешающие уравнения относительно α и β , подставим выражения для изгибающих и крутящего момента (4.39) во второе и третье уравнение равновесия в (2.2):

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} \right) \right) =$$

$$= D \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right);$$

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) \right) =$$

$$= D \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right).$$
(4.43)

Введем функцию перемещений по формуле:

$$F = \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y}.$$
(4.44)

Тогда равенство (4.40) переписется в виде:

$$\nabla^2 F = -\frac{q}{D}.$$
(4.45)

Из уравнения (4.45) видно, что функция перемещений во времени постоянна, и может быть определена как численно, так и аналитически. Исключим из первого равенства в (4.43) функцию β , а из второго равенства – функцию α :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta}{\partial y} &= F - \frac{\partial \alpha}{\partial x}; \\
\frac{\partial^2 \beta}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2}; \\
Q_x &= D \left(\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y^2} \right) \\
&= \frac{D}{2} \left((1 - \nu) \nabla^2 \alpha + (1 + \nu) \frac{\partial F}{\partial x} \right); \\
\frac{\partial \alpha}{\partial x} &= F - \frac{\partial \beta}{\partial y}; \\
\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2}; \\
Q_y &= D \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} + \frac{1 + \nu}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} \right) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) \\
&= \frac{D}{2} \left((1 - \nu) \nabla^2 \beta + (1 + \nu) \frac{\partial F}{\partial y} \right).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Приравняв (4.46) к первым двум уравнениям (4.39), получим разрешающие уравнения для α и β :

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \alpha - \frac{2G_3 h}{D(1 - \nu)} \alpha &= \frac{2G_3 h}{D(1 - \nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \gamma_{zx}^{c*} \right) - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial F}{\partial x}; \\
\nabla^2 \beta - \frac{2G_3 h}{D(1 - \nu)} \beta &= \frac{2G_3 h}{D(1 - \nu)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \gamma_{zy}^{c*} \right) - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \frac{\partial F}{\partial y}.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Таким образом, решение выполняется в 3 этапа: сначала определяется функция перемещений F из уравнения (4.45), затем прогибы w из уравнения (4.42) и далее функции α и β из уравнений (4.47).

Вместо дифференциального уравнения четвертого порядка для прогиба можно получить уравнение второго порядка. Для этого продифференцируем первое равенство в (4.39) по x , а второе по y и сложим их:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = G_3 h \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y} \right). \quad (4.48)$$

Принимая во внимание первое уравнение равновесия в (2.2), получим в итоге:

$$\nabla^2 w = -\frac{q}{G_3 h} - F + \frac{\partial \gamma_{zx}^{c*}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zy}^{c*}}{\partial y}. \quad (4.49)$$

Таким образом, задача расчета трехслойной пластинки с учетом ползучести сводится к четырем дифференциальным уравнениям второго порядка. На каждом крае пластины для функций w, F, α, β задается по одному граничному условию. Если пластина шарнирно оперта по контуру, то во всех точках контура $w = 0$. На шарнирных краях при $x = 0$ и $x = a$ (см. рис. 2.2) положим $\beta = 0$. Тогда автоматически на этих краях обращается в нуль производная $\frac{\partial \beta}{\partial y}$. Из этого следует, что изгибающий момент M_x будет равен нулю при $x = 0$ и $x = a$, если $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = 0$.

Аналогично для краев $y = 0$ и $y = b$ в случае их шарнирного опирания примем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0; \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Поскольку производные $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ и $\frac{\partial \beta}{\partial y}$ на шарнирно опертом контуре обращаются в нуль, то и функция перемещений F на нем равна нулю.

4.4 Конечно-элементное моделирование ползучести трехслойных пластин

В работах [43, 44] приводятся разрешающие уравнения для треугольного конечного элемента трехслойной плиты и оболочки. В настоящей диссертации будут рассмотрены прямоугольные конечные элементы, характеризующиеся более высокой точностью. Такие элементы также рассматриваются в работе [45], однако в указанной статье вводится допущение о недеформируемости несущих слоев.

Используемый прямоугольный конечный элемент трехслойной плиты приведен на рис. 4.7. Каждый узел данного элемента имеет 5 степеней свободы:

перемещения в плоскости верхней обшивки u_i^B и v_i^B , перемещения в плоскости нижней обшивки u_i^H и v_i^H , а также прогиб w_i .

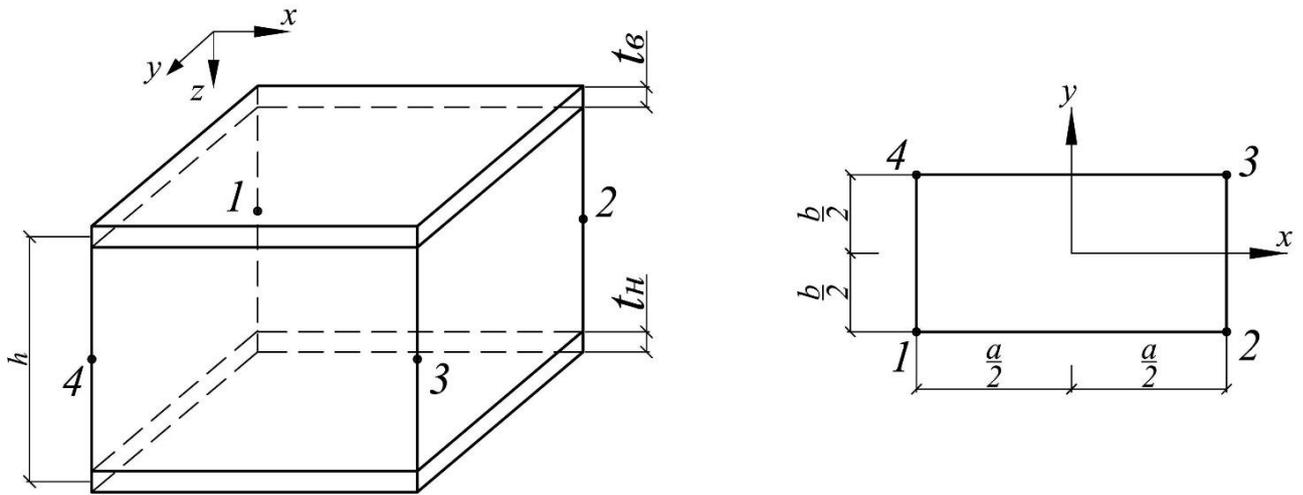


Рис. 4.7 – Прямоугольный конечный элемент трехслойной плиты

Для поля перемещений в пределах элемента принимаем следующую аппроксимацию:

$$\begin{aligned} u^{B(H)} &= N_1 u_1^{B(H)} + N_2 u_2^{B(H)} + N_3 u_3^{B(H)} + N_4 u_4^{B(H)} \\ v^{B(H)} &= N_1 v_1^{B(H)} + N_2 v_2^{B(H)} + N_3 v_3^{B(H)} + N_4 v_4^{B(H)} \\ w &= N_1 w_1 + N_2 w_2 + N_3 w_3 + N_4 w_4, \end{aligned} \quad (4.51)$$

где N_1, N_2, N_3, N_4 – функции формы.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} - x \right) \left(\frac{b}{2} - y \right); \\ N_2 &= \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} + x \right) \left(\frac{b}{2} - y \right); \\ N_3 &= \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} + x \right) \left(\frac{b}{2} + y \right); \\ N_4 &= \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} - x \right) \left(\frac{b}{2} + y \right), \end{aligned} \quad (4.52)$$

где a, b – размеры конечного элемента.

Координаты x и y в формулах (4.52) отсчитываются от центра тяжести конечного элемента.

Вектор деформаций элемента записывается в виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^H \\ \varepsilon_y^H \\ \gamma_{xy}^H \\ \varepsilon_x^B \\ \varepsilon_y^B \\ \gamma_{xy}^B \\ \gamma_{zx}^C \\ \gamma_{yx}^C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^H}{\partial x} \\ \frac{\partial v^H}{\partial y} \\ \frac{\partial u^H}{\partial y} + \frac{\partial v^H}{\partial x} \\ \frac{\partial u^B}{\partial x} \\ \frac{\partial v^B}{\partial y} \\ \frac{\partial u^B}{\partial y} + \frac{\partial v^B}{\partial x} \\ \frac{u^H - u^B}{h} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{v^H - v^B}{h} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (4.53)$$

где $\varepsilon_x^H, \varepsilon_y^H, \gamma_{xy}^H$ – деформации нижней обшивки, $\varepsilon_x^B, \varepsilon_y^B, \gamma_{xy}^B$ – деформации верхней обшивки, $\gamma_{zx}^C, \gamma_{yx}^C$ – деформации заполнителя.

Подставив (4.51) в (4.53), получим следующую связь между узловыми перемещениями и деформациями в матричном виде:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\}, \quad (4.54)$$

где $\{U\}$ – вектор узловых перемещений.

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{\rho_1\} \\ \{\rho_2\} \\ \{\rho_3\} \\ \{\rho_4\} \end{Bmatrix}, \quad \{\rho_i\} = \{u_i^H \quad v_i^H \quad u_i^B \quad v_i^B \quad w_i\}^T.$$

Ненулевые элементы матрицы $[B]$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} B_{1,1} = B_{3,2} = B_{4,3} = B_{6,4} = B_{7,5} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} = -\frac{1}{ab} \left(\frac{b}{2} - y \right); \\ B_{1,6} = B_{3,7} = B_{4,8} = B_{6,9} = B_{7,10} &= \frac{\partial N_2}{\partial x} = \frac{1}{ab} \left(\frac{b}{2} - y \right); \\ B_{1,11} = B_{3,12} = B_{4,13} = B_{6,14} = B_{7,15} &= \frac{\partial N_3}{\partial x} = \frac{1}{ab} \left(\frac{b}{2} + y \right); \end{aligned}$$

$$B_{1,16} = B_{3,17} = B_{4,18} = B_{6,19} = B_{7,20} = \frac{\partial N_4}{\partial x} = -\frac{1}{ab} \left(\frac{b}{2} + y \right);$$

$$B_{2,2} = B_{3,1} = B_{5,4} = B_{6,3} = B_{8,5} = \frac{\partial N_1}{\partial y} = -\frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} - x \right);$$

$$B_{2,7} = B_{3,6} = B_{5,9} = B_{6,8} = B_{8,10} = \frac{\partial N_2}{\partial y} = -\frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} + x \right);$$

$$B_{2,12} = B_{3,11} = B_{5,14} = B_{6,13} = B_{8,15} = \frac{\partial N_3}{\partial y} = \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} + x \right);$$

$$B_{2,17} = B_{3,16} = B_{5,19} = B_{6,18} = B_{8,20} = \frac{\partial N_4}{\partial y} = \frac{1}{ab} \left(\frac{a}{2} - x \right);$$

$$B_{7,1} = B_{8,2} = -B_{7,3} = -B_{8,4} = \frac{N_1}{h}; \quad B_{7,6} = B_{8,7} = -B_{7,8} = -B_{8,9} = \frac{N_2}{h};$$

$$B_{7,11} = B_{8,12} = -B_{7,13} = -B_{8,14} = \frac{N_3}{h}; \quad B_{7,16} = B_{8,17} = -B_{7,18} = -B_{8,19} = \frac{N_4}{h}.$$

Разрешающие уравнения будут получены, исходя из вариационного принципа Лагранжа. Потенциальная энергия деформации трехслойной пластины с учетом ползучести определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_A t^H (\sigma_x^H \varepsilon_x^H + \sigma_y^H \varepsilon_y^H + \tau_{xy}^H \gamma_{xy}^H) + t^B (\sigma_x^B \varepsilon_x^B + \sigma_y^B \varepsilon_y^B + \tau_{xy}^B \gamma_{xy}^B) + \\ & + h [\tau_{zx}^c (\gamma_{zx}^c - \gamma_{zx}^{c*}) + \tau_{zy}^c (\gamma_{zy}^c - \gamma_{zy}^{c*})] dA, \end{aligned} \quad (4.55)$$

где γ_{zx}^{c*} , γ_{zy}^{c*} – деформации ползучести заполнителя.

Выражение (4.55) можно переписать в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \{N\}^T (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}) dA = \frac{1}{2} \int_A \{N\}^T ([B]\{U\} - \{\varepsilon^*\}) dA, \quad (4.56)$$

где $\{\varepsilon^*\} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \gamma_{zx}^{c*} \ \gamma_{zy}^{c*}\}^T$ – вектор деформаций ползучести;

$\{N\}^T = \{N_x^H \ N_y^H \ N_{xy}^H \ N_x^B \ N_y^B \ N_{xy}^B \ Q_{zx} \ Q_{zy}\}$ – вектор внутренних усилий;

$$N_x^{H(B)} = \sigma_x^{H(B)} \cdot t^{H(B)}, \quad N_y^{H(B)} = \sigma_y^{H(B)} \cdot t^{H(B)}, \quad N_{xy}^{H(B)} = \tau_{xy}^{H(B)} \cdot t^{H(B)}, \quad Q_{zx} = \tau_{zx}^c \cdot h,$$

$$Q_{zy} = \tau_{zy}^c \cdot h.$$

Связь между деформациями и внутренними усилиями имеет вид:

$$\{N\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}) = [D]([B]\{U\} - \{\varepsilon^*\}), \quad (4.57)$$

где $[D]$ – блочная матрица упругих постоянных.

$$[D] = \begin{bmatrix} [D^H] & & \\ & [D^B] & \\ & & [D^3] \end{bmatrix},$$

где $[D^{B(H)}] = \frac{Et^{B(H)}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$, $[D^3] = G_3 h \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, G_3 – модуль сдвига

заполнителя.

Подставив (4.57) в (4.56), получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} (\{U\}^T \int_A [B]^T [D] [B] dA \{U\} - \{U\}^T \int_A [B]^T [D] dA \{\varepsilon^*\} - \\ &- \{\varepsilon^*\}^T \int_A [D] [B] dA \{U\} + \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\} dA) = \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T \int_A [B]^T [D] [B] dA \{U\} - \{U\}^T \int_A [B]^T [D] dA \{\varepsilon^*\} \\ &+ \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\} dA. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Дифференцируя полную энергию $\mathcal{E} = \Pi - A$ по вектору узловых перемещений получим:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \{U\}} = [K] \{U\} - \{F\} - \{F^*\} = 0, \quad (4.59)$$

где $[K] = \int_A [B]^T [D] [B] dA$ – матрица жесткости, $\{F^*\} = \int_A [B]^T [D] dA \{\varepsilon^*\}$ – вклад деформаций ползучести в правую часть системы линейных алгебраических уравнений МКЭ.

Точные выражения для коэффициентов матрицы $[K]$ и вектора $\{F^*\}$ были получены при помощи функций для работы с символьными переменными пакета Matlab. Вектор $\{F^*\}$ имеет вид:

$$\{F^*\} = \begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ -\frac{G_3 h}{2} (a\gamma_{zy}^{c*} + b\gamma_{zx}^{c*}) \\ \{F_1\} \\ \frac{G_3 h}{2} (-a\gamma_{zy}^{c*} + b\gamma_{zx}^{c*}) \\ \{F_1\} \\ \frac{G_3 h}{2} (a\gamma_{zy}^{c*} + b\gamma_{zx}^{c*}) \\ \{F_1\} \\ \frac{G_3 h}{2} (a\gamma_{zy}^{c*} - b\gamma_{zx}^{c*}) \end{Bmatrix}, \text{ где } \{F_1\} = \frac{abG_3}{4} \begin{Bmatrix} \gamma_{zx}^{c*} \\ \gamma_{zy}^{c*} \\ -\gamma_{zx}^{c*} \\ -\gamma_{zy}^{c*} \end{Bmatrix}. \quad (4.60)$$

Был выполнен расчет трехслойной прямоугольной шарнирно опертой по контуру плиты при следующих исходных данных: толщина плиты $h = 8$ см, модуль упругости обшивок $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент Пуассона обшивок $\nu = 0.3$, толщина обшивок $t^B = t^H = 1.5$ мм, размеры плиты $a = b = 3$ м, на пластину действует равномерно распределенная по площади нагрузка $q = 2$ кПа. В качестве закона ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Упругие и реологические параметры заполнителя такие же, как в параграфе 4.2.

Принимались следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x = 0, \quad x = a: \quad w = 0, \quad v^H = v^B = 0; \\ y = 0, \quad y = b: \quad w = 0, \quad u^H = u^B = 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

График роста прогиба в центре плиты приведен на рис. 4.8. Совпадение результатов, полученных при помощи МКР и МКЭ свидетельствует о их достоверности.

Напряжения в обшивках и заполнителе в процессе ползучести при небольших нагрузках практически не меняются. Распределение напряжений σ_x^H и τ_{xy}^H в нижней обшивке в зависимости от x и y приведено соответственно на рис. 4.9 и рис. 4.10. Напряжения в верхней обшивке при граничных условиях (4.61) по абсолютному значению совпадают с напряжениями в нижней обшивке. Распределение касательных напряжений в заполнителе приведено на рис. 4.11.

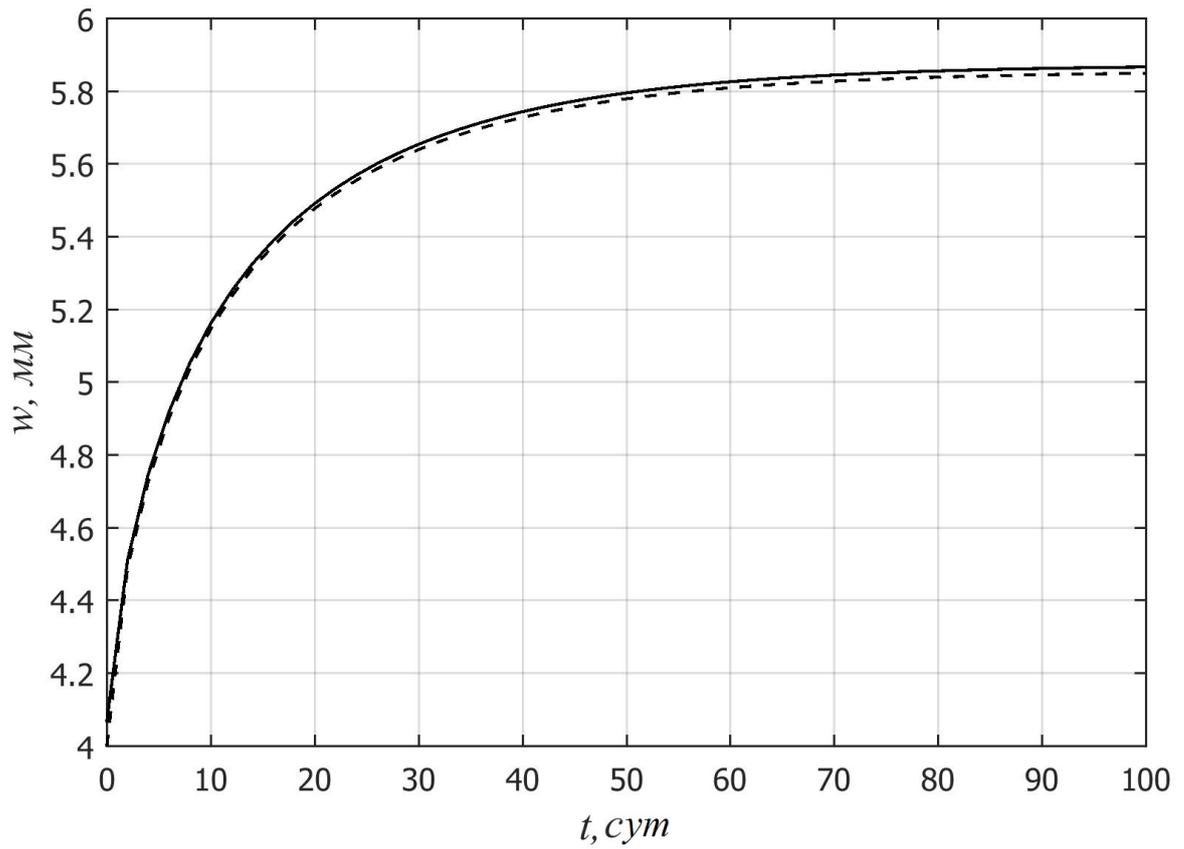


Рис. 4.8 – График роста прогиба в центре плиты: штриховая линия – МКР, сплошная линия – МКЭ

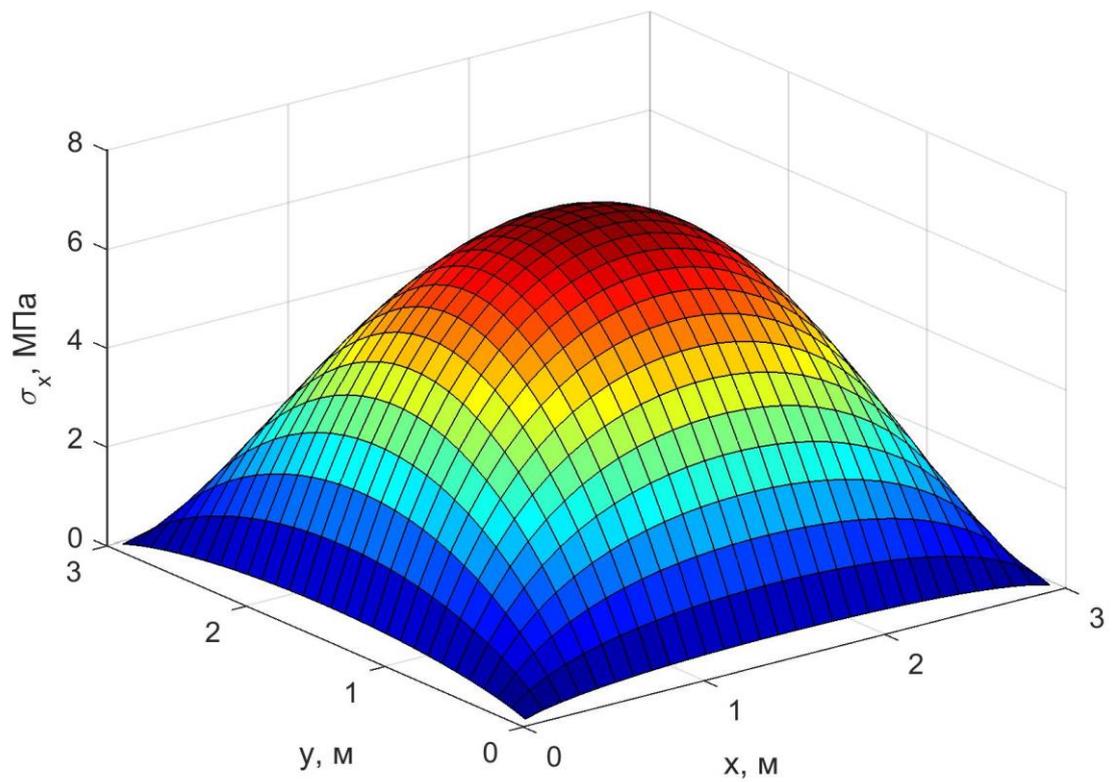


Рис. 4.9 – Распределение нормальных напряжений в нижней обшивке

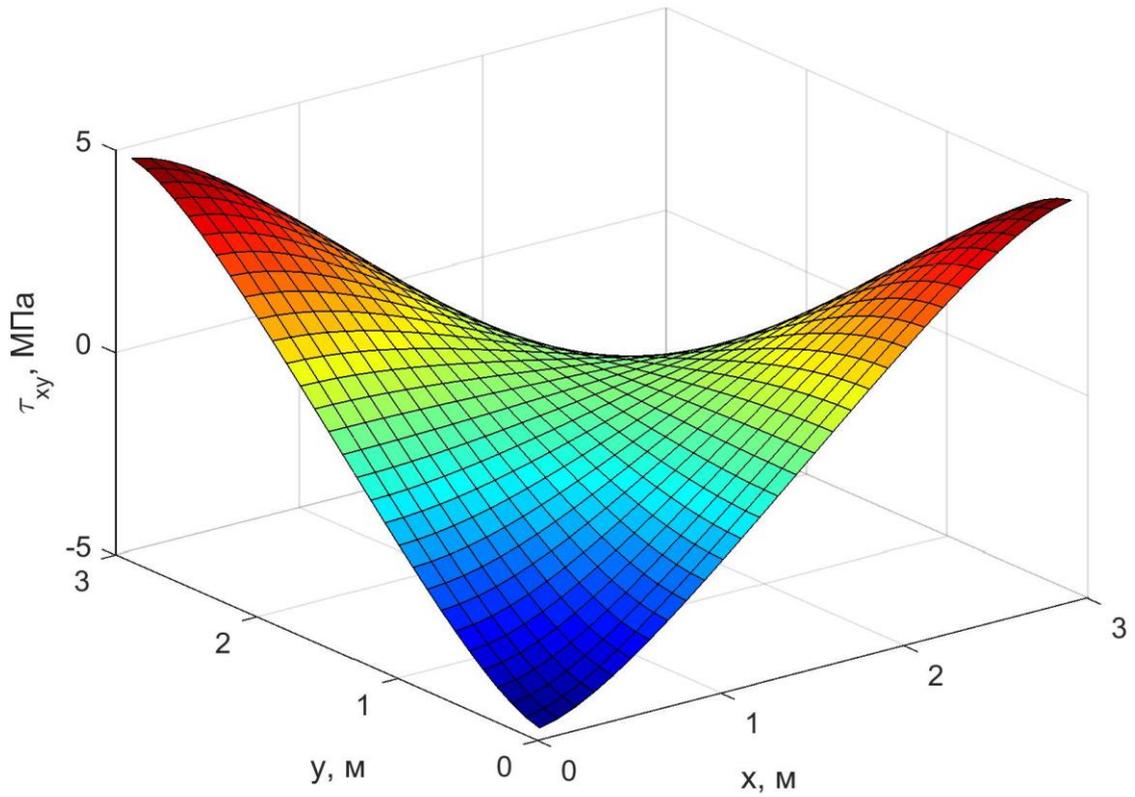


Рис. 4.10 – Распределение касательных напряжений в нижней обшивке

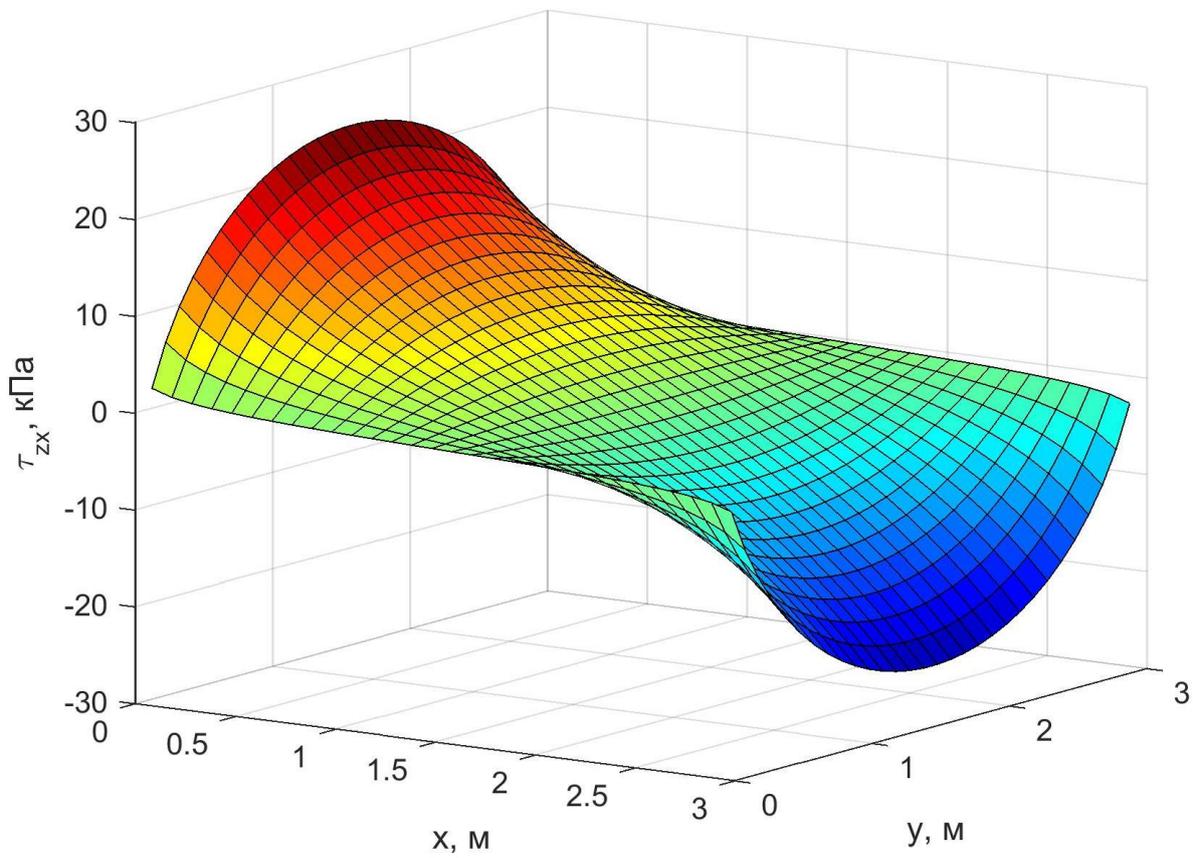


Рис. 4.11 – Распределение касательных напряжений в заполнителе

С увеличением нагрузки проявляется нелинейный характер ползучести. На рис. 4.12 приведен график изменения во времени наибольших касательных напряжений в обшивках при $q = 10$ кПа. В течение первых трех часов происходит рост напряжений на 6.65%, а затем они убывают. Напряжения σ_x и σ_y во времени не меняются. Касательные напряжения в заполнителе в начальный момент времени убывают на 2.5%, график их изменения во времени приведен на рис. 4.13. В конце процесса ползучести напряжения в обшивках и заполнителе такие же, как и при $t = 0$.

Для прямоугольных плит при $a \neq b$ происходит изменение во времени не только касательных напряжений в обшивке, но и нормальных. На рис. 4.14 – рис. 4.18 приведены результаты расчета плиты 2x4 м при $q = 10$ кПа. Напряжения σ_x в обшивках в начальный момент времени снизились на 3.41 %, а σ_y и τ_{xy} – возросли соответственно на 6.73% и 9.69%. Напряжения τ_{zx} и τ_{zy} в заполнителе снизились соответственно на 1.7%, и 1.35%. В конце процесса ползучести, как и в предыдущей задаче, происходит возврат к упругому решению.

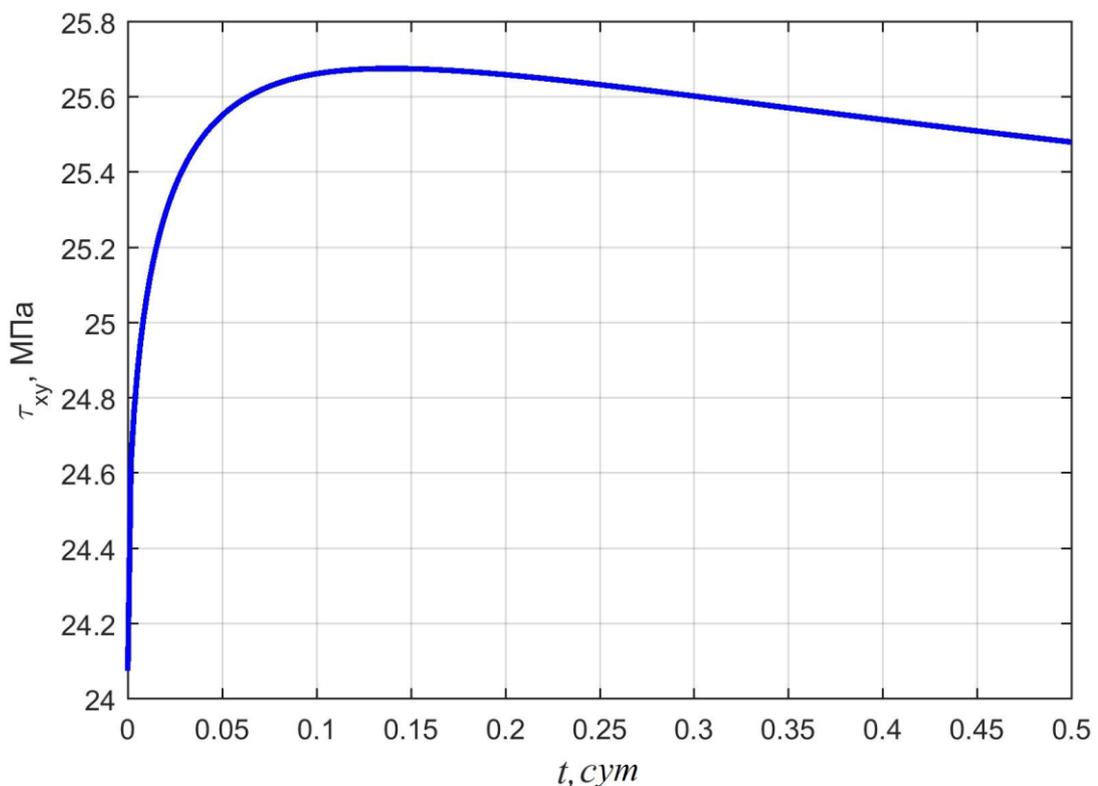


Рис. 4.12 – Изменение во времени касательных напряжений в обшивках при $q = 10$ кПа

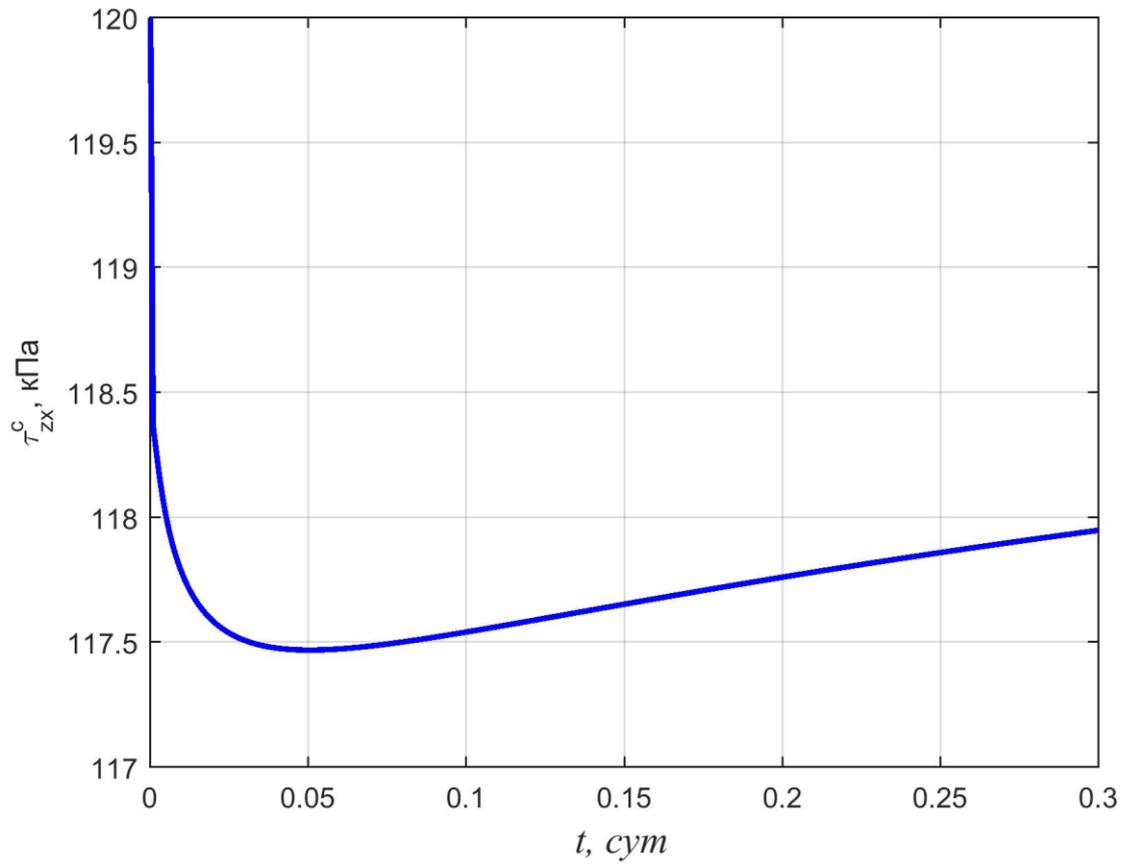


Рис. 4.13 – Изменение касательных напряжений в заполнителе при $q = 10$ кПа

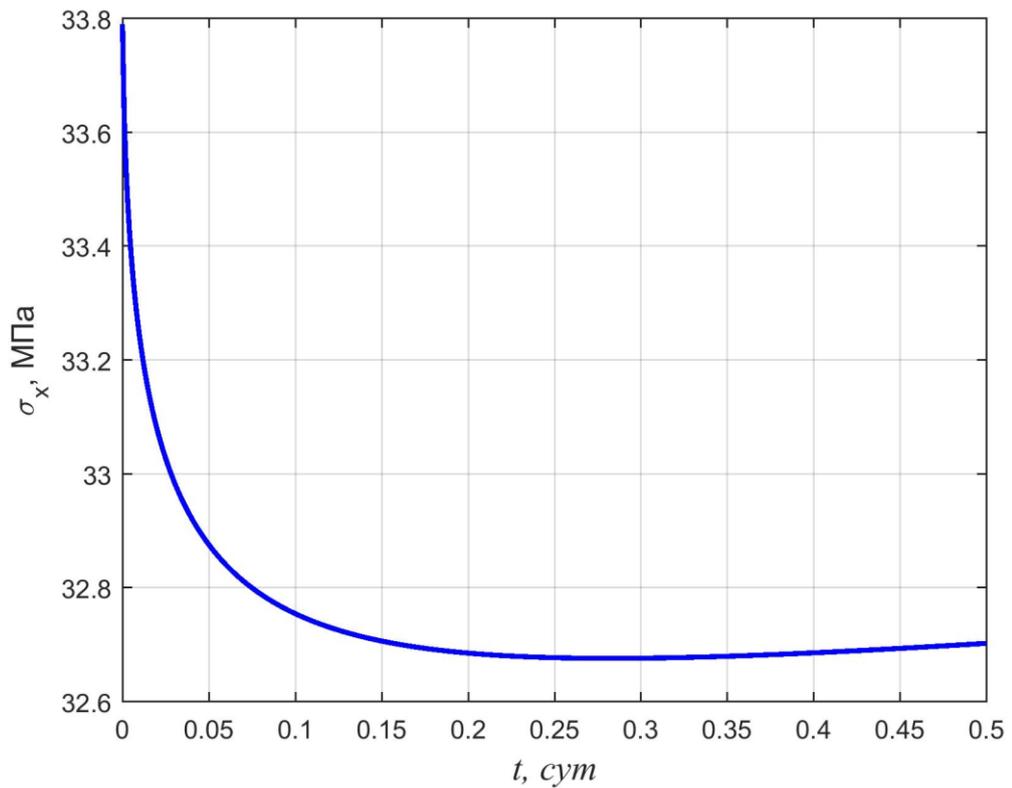


Рис. 4.14 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_x в нижней обшивке

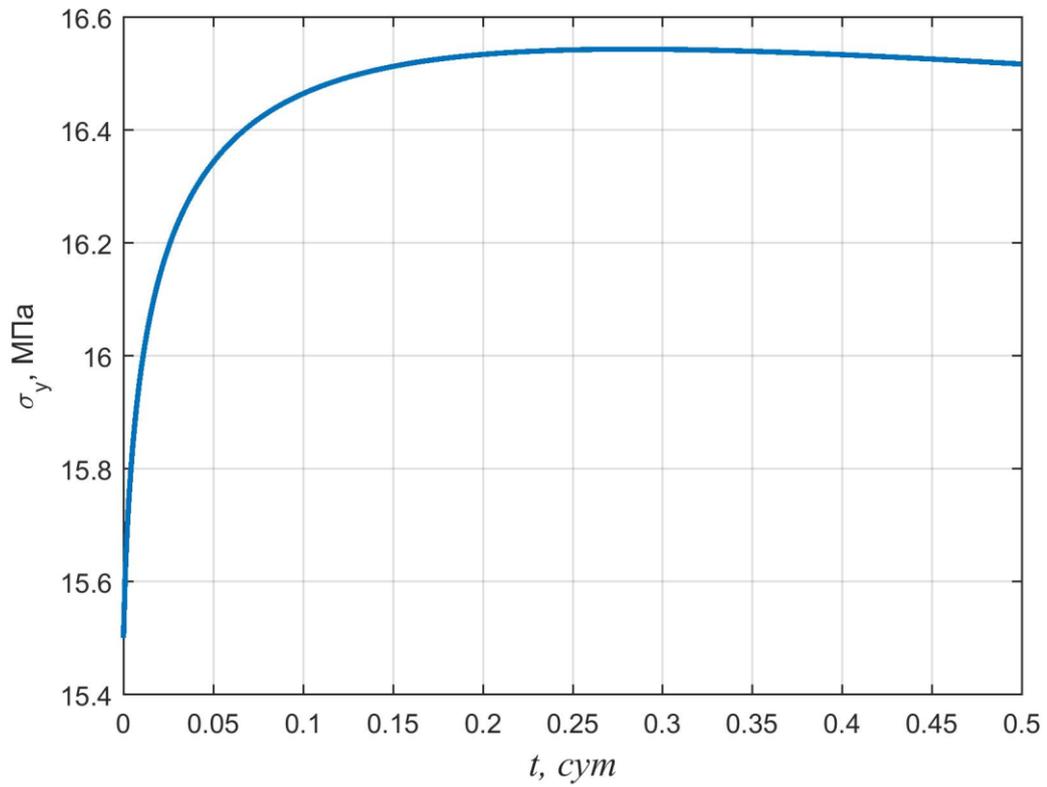


Рис. 4.15 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений σ_y в нижней обшивке

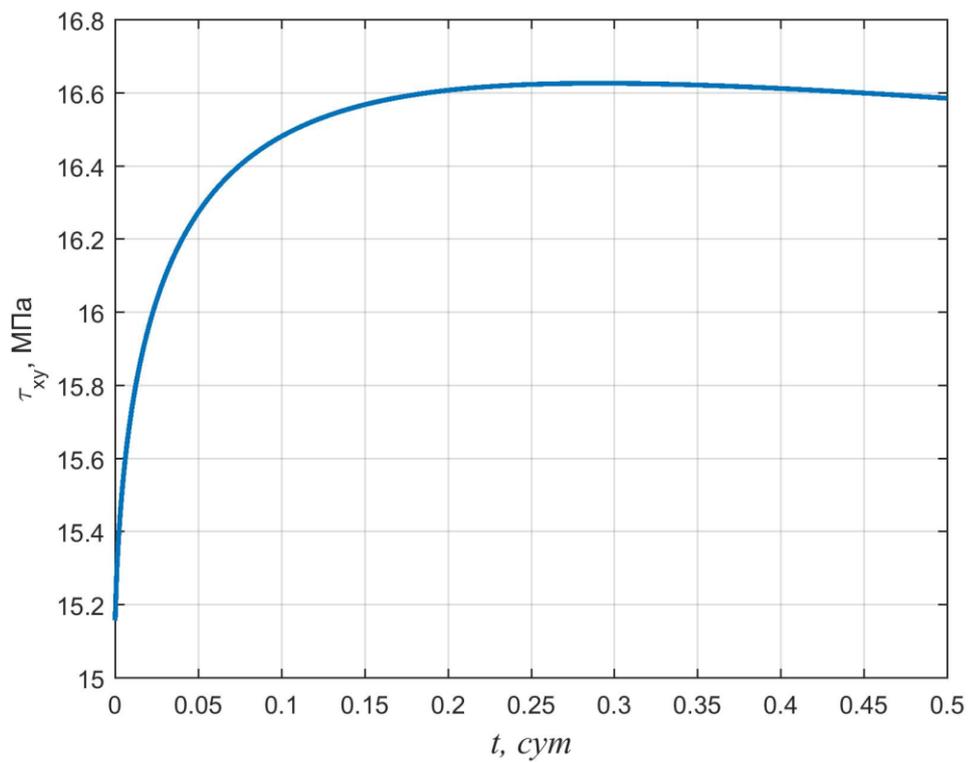


Рис. 4.16 – Изменение во времени наибольшей величины напряжений τ_{xy} в нижней обшивке

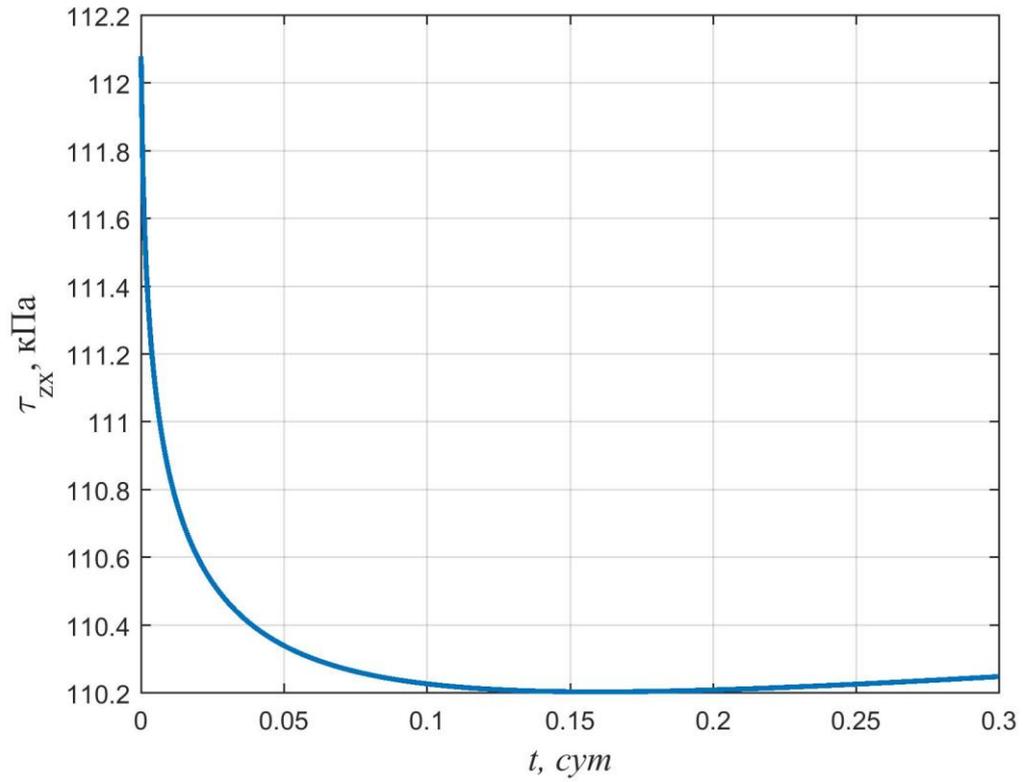


Рис. 4.17 – Изменение во времени наибольшей величины касательных напряжений τ_{zx} в заполнителе

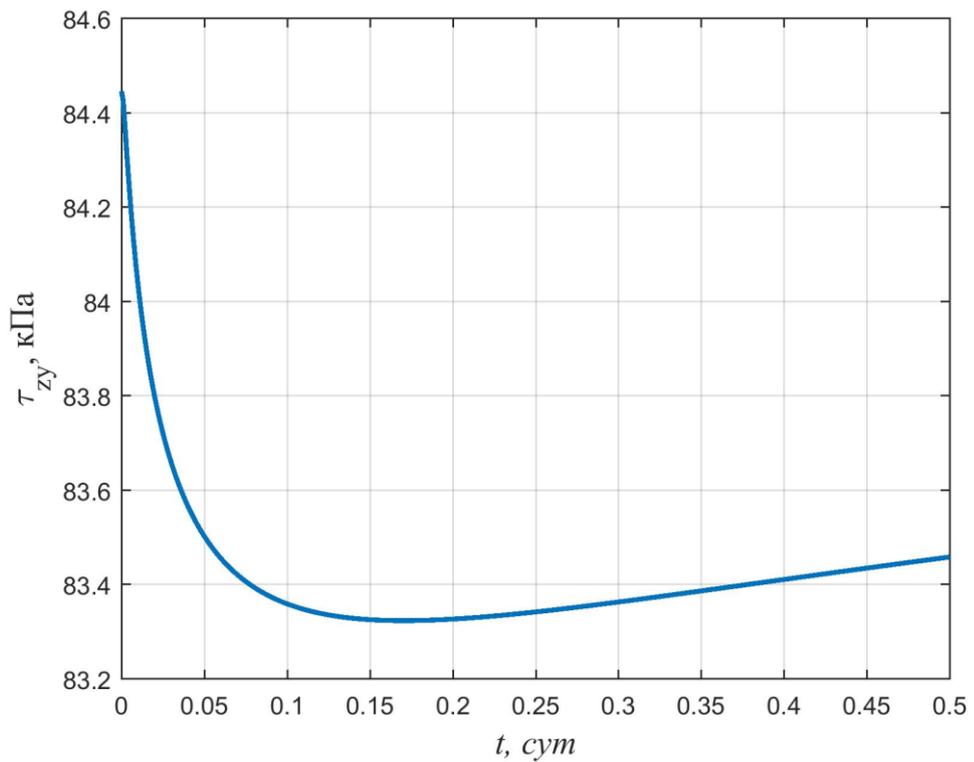


Рис. 4.18 – Изменение во времени наибольшей величины касательных напряжений τ_{zy} в заполнителе

4.5 Выводы по главе

Разработана методика определения реологических параметров пенополиуретана при сдвиговой ползучести на основе нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича. Показано, что при использовании указанного уравнения качество аппроксимации экспериментальных кривых ползучести выше, чем в случае применения степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла-Томпсона.

Приведено решение задачи изгиба трехслойной балки с легким наполнителем из жесткого двухкомпонентного пенополиуретана (PUR) с использованием уравнения Максвелла-Томпсона, а также уравнения Максвелла-Гуревича. При малых напряжениях результаты по линейной и нелинейной теории практически совпадают, но с ростом нагрузки наблюдается различие в характере кривых. По нелинейной теории при больших напряжениях рост прогиба и затухание скорости роста деформаций ползучести происходит быстрее. В конце процесса ползучести прогибы, полученные по линейной и нелинейной теории, совпадают при любом уровне нагрузки. Для подтверждения результатов выполнено конечно-элементное моделирование в программном комплексе ЛИРА-САПР в трехмерной постановке с использованием длительных упругих постоянных.

Получена система дифференциальных уравнений для расчета с учетом ползучести трехслойной пластинки. Разработана методика конечно-элементного моделирования ползучести трехслойных пластин при помощи прямоугольных конечных элементов. Представлено сравнение результатов, полученных при помощи МКР и МКЭ. Установлено, что при использовании нелинейного закона ползучести напряжения во времени не постоянны. Происходит рост касательных напряжений в обшивках и снижение касательных напряжений в наполнителе, однако в конце процесса наблюдается возврат к упругому распределению напряжений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации проведено комплексное исследование нелинейных реологических процессов в пластинах из полимерных и композитных материалов, а также в трехслойных пластинах с полимерным наполнителем, в результате которого выявлены закономерности изменения напряженно-деформированного состояния в процессе ползучести. Совокупность полученных результатов позволяет сделать следующие **выводы**:

1. Получены универсальные разрешающие уравнения для расчета с учетом ползучести изотропных полимерных пластин при изгибе и в случае плоского напряженного состояния. Разработана методика конечно-элементного моделирования с использованием треугольных конечных элементов.

2. Проведено теоретическое исследование ползучести изотропных полимерных пластин в случае изгиба и растяжения на примере полиметилметакрилата, вторичного поливинилхлорида, ЭДТ-10. Установлено, что при изгибе напряжения в процессе ползучести меняются незначительно. При растяжении полимерной полосы из ПММА с отверстием на начальном временном интервале происходит релаксация напряжений, а затем возврат к упругому решению.

3. Произведен вывод разрешающих уравнений и разработана универсальная методика расчета на изгиб и растяжение/сжатие с учетом ползучести ортотропных пластин из армированных полимеров. Рассмотрена задача изгиба, а также растяжения пластинки с отверстием из стеклопластика ВПС-48/120. Установлено, что для ортотропной пластинки, в отличие от изотропной, происходит перераспределение напряжений: нормальные напряжения возрастают, а касательные убывают. Получены выражения для длительных упругих постоянных, что позволяет найти решение задачи в конце процесса ползучести теми же методами, что и упругое решение.

4. Разработана методика и произведено определение реологических параметров материала, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича,

при сдвиговой ползучести на примере жесткого двухкомпонентного пенополиуретана. Установлено, что для пенополиуретана указанное уравнение лучше описывает кривые ползучести по сравнению с используемыми в литературе законами Финдли и Максвелла-Томпсона.

5. Проведено теоретическое исследование ползучести трехслойных балок с легким наполнителем из пенополиуретана с использованием уравнения Максвелла-Томпсона, а также уравнения Максвелла-Гуревича. При малых напряжениях линейная и нелинейная теория дает очень близкие результаты, но с ростом нагрузки наблюдается различие в характере кривых. Для подтверждения результатов выполнено конечно-элементное моделирование в программном комплексе ЛИРА-САПР в трехмерной постановке с использованием выведенных автором длительных механических постоянных.

6. Получена система дифференциальных уравнений для расчета с учетом ползучести трехслойной пластинки с средним полимерным слоем. Разработана методика конечно-элементного моделирования ползучести трехслойных конструкций с использованием прямоугольных конечных элементов. Представлено сравнение результатов, полученных при помощи МКР и МКЭ. Установлено, что при использовании нелинейного закона ползучести, в отличие от линейной теории, для пластины с пенополиуретановым наполнителем наблюдается изменение во времени напряжений. Касательные напряжения в обшивках возрастают, а в наполнителе убывают, однако в конце процесса происходит возврат к упругому распределению напряжений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сидорцев, С.А. Полимерная солнцезащита в строительстве / С.А. Сидорцев, И.Л. Шубин, О.В. Люцько // Вестник МГСУ. – 2011. – №. 3-1. – С. 158-169.
2. Ярмоленко, А.Д. Архитектура висячих покрытий Фрая Отто / А.Д. Ярмоленко // Общество. Среда. Развитие (Terra Humana). – 2009. – №3. – С.73-80.
3. Ярмоленко, А.Д. Мембраны в строительной технике: история и перспективы / А.Д. Ярмоленко // Структурно-композиционный инструментарий формообразования. – СПб.: Астерион, 2008. – С. 113.
4. Куршакова, В.Н. Проблемы применения новейших мембранных конструкций в современной архитектуре / В.Н. Куршакова // «Архитектон: известия вузов». – 2008. – № 22. – Режим доступа: http://archvuz.ru/2008_22/27.
5. Сидорцев, С.А. Патент на изобретение №2306397 "Способ получения и устройство солнцезащитного ограждения из полимерного материала".
6. Шубин, И.Л. Заявка на изобретение №201021540/03 от 21.07.2010 г. "Способ получения и устройство двухстеночного ячеистого солнцезащитного ограждения" / И.Л. Шубин, С.А. Сидорцев, К.В. Люцько.
7. Сидорцев, С.А. Патент на изобретение №2304682 "Элемент солнцезащитного ограждения из полиметилметакрилата и солнцезащитное энергосберегающее ограждение".
8. Абрамян, С.Г. Характерные особенности прозрачных кровельных материалов / С.Г. Абрамян, Д.К. Фарниев // Наукоедение. – 2016. – №2. Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/58TVN216.pdf>.
9. Зарубина, Л.П. Теплоизоляция зданий и сооружений. Материалы и технологии. 2-е изд / Л.П. Зарубина. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 416 с.
10. Дронов, А.А. Современные технологии тепло- и гидрозащиты / А.А. Дронов // Промышленное и гражданское строительство. – 2000. – № 6. – С. 21–24.
11. Денисов, А.В. Жесткие пенополиуретаны теплоизоляционного назначения / А. В. Денисов // Строительные материалы. – № 6. – 2005. – С. 21–22.

12. Пономарева, Г.П. Энергосберегающая сэндвич-конструкция из слоистого пластика / Г.П. Пономарева, А.А. Артеменко, О.М. Сладков // Вестник СГТУ. – 2010. – №1. – С. 91-94.
13. Пономарев, М.В. Ограждающие и строительные конструкции из пенополиуретана, армированного базальтопластиком / М.В. Пономарев, Г.П. Пономарева, О.М. Сладков // Материалы XVII Международной научно-практической конференции «Современные техника и технологии». – С. 213-214.
14. Амбарцумян, С.А. Теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. М.: Гос. изд-во физико-математической лит-ры, 1961. – 448 с.
15. Лехницкий, С.Г. Анизотропные пластинки / С. Г. Лехницкий. М.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1957. – 463 с.
16. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела / С.Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
17. Папкович, П.Ф. Труды по строительной механике корабля: Устойчивость стержней, перекрытий и пластин / П.Ф. Папкович. – Гос. союзное изд-во судостроит. промышл., 1963. – Т. 4. – 576 с.
18. Болотин, В.В. Механика многослойных конструкций / В.В. Болотин. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
19. Власов, В.З. Избранные труды: тонкостенные пространственные системы / В.З. Власов. – Издательство Академии Наук СССР, 1964.
20. Галимов, К.З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко / К.З. Галимов // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1977. – №. 4. – С. 21-32.
21. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А. С. Вольмир. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956. – 419 с.
22. Муштари, Х.М. Нелинейная теория упругих оболочек / Х.М. Муштари, К.З. Галимов. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 437 с.
23. Феодосьев, В.И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем / В.И. Феодосьев // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. 27. – №. 2. – С. 265-274.

24. Качанов, Л.М. Теория ползучести / Л.М. Качанов. – М.: Физматгиз, 1960. – 680 с.
25. Работнов, Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
26. Ржаницын, А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени / А.Р. Ржаницын – Л.: Гостехиздат, 1949. – 543 с.
27. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
28. Леонтьев, Н.Н. Метод конечных элементов в теории сооружений: учебное пособие / Н.Н. Леонтьев. – М.: МИСИ, 1979. – 329 с.
29. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. - М.: Мир, 1975 - 543 с.
30. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О. Зенкевич, И. Чанг. – М.: Недра, 1974. – 240 с.
31. Басов, К.А. ANSYS: справочник пользователя / К.А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2005. – 640 с.
32. Сапожников, С.Б. Конструкционная прочность полимерных композитов на основе коротких стеклянных волокон / С.Б. Сапожников, Р.Р. Абдрахимов, А.А. Шакиров // Вестник ЮУрГУ. Серия: Математика. Механика. Физика. – 2014. – №1. – С.50-54 .
33. Сметанников, О.Ю. Экспериментальное и численное исследование эволюции деформаций круглой пластины из эпоксидной смолы при неравномерном охлаждении / О.Ю. Сметанников //Вычислительная механика сплошных сред. – 2009. – Т. 2. – №. 3. – С. 96-105.
34. Матвеевко, В.П. Термомеханика полимерных материалов в условиях релаксационного перехода / В.П. Матвеевко, О.Ю. Сметанников, Н.А. Труфанов, И.Н. Шардаков // Физич. мезомех. – 1999. – Т. 2, № 4. – С. 23-29.
35. Савин, С.Н. Экспериментальное определение модуля Юнга полимерных материалов / С.Н. Савин // Вісник ОНУ. Хімія. – 2016. – Т. 21. – С. 72-78.

36. Аношкин, А.Н. Измерение неоднородных полей деформаций встроенными в полимерный композиционный материал волоконно-оптическими датчиками / А.Н. Аношкин [и др.] // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2016. – №. 5. – С. 42-51.

37. Вашуков, Ю.А. Конечно-элементное моделирование напряженного состояния при подкреплении отверстия в элементах конструкций из полимерных композиционных материалов / Ю.А. Вашуков [и др.] // Известия Самарского научного центра РАН. – 2005. – №2. – С. 436 - 441.

38. Aliev, A.V. Optimization of Geometrical Parameters of Three-Layer Plate by Finite Element Method / A.V. Aliev, A.A. Kalinnikov, A.E. Kalinnikov // Bulletin of Kalashnikov ISTU. – 2014. – №. 1. – С. 141-145.

39. Коршунов, В.А. Численная реализация возможных форм нелинейной потери устойчивости сэндвич-панелей из полимерных композиционных материалов / В.А. Коршунов, Д.А. Пономарев, Д.А. Родионов // Труды Крыловского государственного научного центра. – 2016. – №.93. – С. 17-26.

40. Угримов, С.В. Расчет трехслойных пластин с композитными обшивками // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов / С.В. Угримов. – 2014. – №. 3. – С. 47-56.

41. Кудин, А.В. Осесимметричный изгиб круглых и кольцевых трехслойных пластин с нелинейно-упругим наполнителем / А.В. Кудин, С.В. Чопоров, С.И. Гоменюк // Матем. моделирование. – 2017. – Т. 29. – № 2. – С. 63–78 .

42. Чепурненко, А.С. Расчет полимерных пластин и оболочек на силовые и температурные воздействия с учетом нелинейной ползучести : дисс. ... канд. техн. наук / А.С. Чепурненко - Ростов-на-Дону, 2015. - 126 с.

43. Cherpurnenko, A.S. Calculation of the Three-layer Shell Taking into Account Creep / A.S. Cherpurnenko, L.R. Mailyan, B.M. Jazyev // Procedia Engineering. – 2016. – Т. 165. – С.990 – 994.

44. Андреев, В.И. Расчет трехслойной полой оболочки с учетом ползучести среднего слоя / В.И. Андреев [и др.] // Вестник МГСУ. — 2015. — №7. — С. 17–24.

45. Языев, Б.М. Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя / Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов, С.Б. Языев // Вестник Дагестанского государственного технического университета. — 2014. — №2. — С.47-55.

46. Радченко, В.П. Ползучесть и релаксация напряжений в упрочненных конструкциях. / В.П. Радченко, М.Н. Саушкин. М.: Машиностроение, 2005. — 227 с.

47. Клименко, Е.С. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учётом физической нелинейности материала: дис. ... канд. тех. наук: 05.23.17 / Е.С. Клименко – Ростов-на-Дону, 2011. – 112 с.

48. Аскадский, А.А., Структура и свойства теплостойких полимеров / А.А. Аскадский, Г.Л. Слонимский //Успехи химии. – 1975. – Т. 44. – №. 9. – С. 1688-1727.

49. Каргин, В.А. О деформации аморфно-жидких линейных полимеров / В.А. Каргин, Г.Л. Слонимский //Доклады Акад. наук СССР. Новая серия. – 1948. – Т. 62. – №. 2. – С. 239-242.

50. Работнов, Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю.Н. Работнов. — М.: Наука, 1979. — 714 с.

51. Малинин, Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести / Н.Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

52. Малинин, Н.Н. Основы расчета на ползучесть / Н.Н. Малинин. – М.: Машгиз, 1976. – 120 с.

53. Дудник, А.Е. Моделирование прочностных характеристик и прогнозирование несущей способности напорных труб из полиолефинов : дис. ... канд. техн. наук / А.Е. Дудник. - Нальчик, 2016.- 133 с.

54. Дудник, А.Е. Плоское деформированное состояние полимерного цилиндра в условиях термовязкоупругости / А.Е. Дудник [и др.] // Инженерный вестник Дона. — 2015. — №2. — URL: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3063>.

55. Гуревич, Г.И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай 3-х измерений с учетом малых деформаций упругого последствия / Г.И. Гуревич // Труды ИФЗ АН СССР. – 1959. – №2 – С. 169.

56. Cherpurnenko, A.S. Determination of rheological parameters of polyvinylchloride at different temperatures / A.S. Cherpurnenko [и др.] // MATEC Web of Conferences. – 2016. – URL: https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2016/30/mateconf_smae2016_06059/mateconf_smae2016_06059.html.

57. Дудник, А.Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры / А.Е. Дудник, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов // Пластические массы. – 2016. – № 1-2. – С. 30-33.

58. Андреев, В.И. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести / В.И. Андреев, Б.М. Языев, А.С. Чепурненко // Вестник МГСУ. – 2014. – № 5. – С. 16-24.

59. Дудник, А.Е., Напряженно-деформированное состояние многослойной полимерной трубы при нелинейной ползучести / А.Е. Дудник, Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, А.С. Денего // Известия Кабардино-балкарского государственного университета. — 2016. — №1. — С. 37-41.

60. Варданян, Г.С. Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности / Г.С. Варданян [и др.] – М.: АСВ. – 1995. – 572 с.

61. Cherpurnenko, A.S. Calculation for the Circular Plate on Creep Considering Geometric Nonlinearity / A.S. Cherpurnenko, B.M. Yazyev, A.A. Savchenko // Procedia Engineering. — 2016. — Vol. 150. — P. 1680–1685.

62. Самуль, В.И. Основы теории упругости и пластичности / В.И. Самуль. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

63. Горохов, А.Ю. О перераспределении напряжений в ортотропной вязкоупругой пластинке в окрестности круглого включения / А.Ю. Горохов, Н.А. Труфанов // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2011. – №1. – С. 170-182.

64. Плуме, Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа / Э.З.Плуме // Механика композиционных материалов. – 1985. – № 3. – С. 431-436.

65. Бажанов, В.Л. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учеб. пособие для вузов. / В.Л. Бажанов [и др.] – М.: Высшая школа, 1970 – 408 с.

66. Garrido, M. Creep behaviour of GFRP sandwich panels with PU foam cores for civil engineering structural applications / M. Garrida, J. Correia, F. Branco // 6th International Conference on FRP Composites in Civil Engineering, Roma. – 2012. – С.15-20.

67. Garrido, M. Creep behaviour of sandwich panels with rigid polyurethane foam core and glass-fibre reinforced polymer faces: Experimental tests and analytical modelling / M. Garrido et al. // Journal of Composite Materials. – 2014. – Т. 48(18) С. 2237–2249.

68. Dudnik, A.E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account / A.E. Dudnik, A.S. Chepurnenko, S.V. Litvinov // International Polymer Science and Technology. – 2017. – Т. 44. – С. 30-33.

69. Chepurnenko, A.S. Determination of Rheological Parameters of Polyvinylchloride at Different Temperatures / A.S. Chepurnenko, V.I. Andreev, A.N. Beskopylny, B.M. Jazyev // MATEC Web of Conferences. – 2016. – Т. 67. – URL: https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2016/30/matecconf_smae2016_06059/matecconf_smae2016_06059.html

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА НА ЭВМ

Расчет полимерных пластин произвольной формы методом конечных элементов

Основной модуль main.m

```

clc;
clear all;
h=0.02;%толщина плиты, м
nz=50;%Количество интервалов по толщине пластинки
dz=h/nz;%шаг по z
E=1480*10^3;%модуль упругости, кН/м^2
Eb=5990*10^3;%модуль высокоэластичности, кН/м^2
mz=12.6*10^3;%модуль скорости, кН/м^2
n0=9.06*10^8;%модуль скорости, кПа*мин
nu=0.3;%коэффициент Пуассона
q=2;%Нагрузка, кН/м2
%Размеры пластины, м
a=0.8;
b=0.6;
t1=0;%начальное время, мин
t2=8*60;%конечное время, мин
nT=80;%количество интервалов по времени, мин
Wmax=zeros(1,nT+1);
dt=(t2-t1)/nT;%Шаг по времени
Time=t1:dt:t2;
%Определение геометрии области
g=[2 2 2 2
   0 a a 0
   a a 0 0
   0 0 b b
   0 b b 0
   1 1 1 1
   0 0 0 0];
[p,e,t]=initmesh(g,'Hmax',0.05);%Генерация сетки КЭ
pdemesh(p,e,t);
np=size(p,2);%количество узлов
nt=size(t,2);%количество элементов
%Формирование матрицы жесткости
K=zeros(3*np,3*np);
for i=1:nt
    koef;
    %Локальная матрица жесткости
    Kt=h^3/12*A/3*(Kf(E, nu, A, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, (x1+x2)/2,
(y1+y2)/2)+Kf(E, nu, A, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, (x2+x3)/2,
(y2+y3)/2)+Kf(E, nu, A, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, (x3+x1)/2,
(y3+y1)/2));
    %Сборка глобальной матрицы
    for j=1:3
        for k=1:3
            for l=1:3
                for m=1:3
                    K(3*ii(1)+j-3,3*ii(m)+k-3)=K(3*ii(1)+j-3,3*ii(m)+k-3)+Kt(3*1+j-
3,3*m+k-3);
                end
            end
        end
    end
end
end
end

```

```

end
%Граничные условия
ne=size(e,2);%количество ребер, попавших на границу
for i=1:ne
    i1=e(1,i);
    i2=e(2,i);
    K(3*i1-2, 1:3*np)=0;
    K(1:3*np, 3*i1-2)=0;
    K(3*i1-2, 3*i1-2)=1;
end
ezx=zeros(nt,nz+1); %деформации ползучести по x
ezy=zeros(nt,nz+1); %деформации ползучести по y
ezxy=zeros(nt,nz+1); %сдвиговые деформации ползучести
sigma_x=zeros(nt,nz+1);
sigma_y=zeros(nt,nz+1);
tau=zeros(nt,nz+1);
Int=zeros(3,nt);
for it=1:nT+1
    P=zeros(1,3*np);
    for i=1:nt
        koef;
        Pe=q*A*[1/3; (b3-b2)/24; (c3-c2)/24; 1/3; (b1-b3)/24; (c1-c3)/24; 1/3; (b2-
b1)/24; (c2-c1)/24]; %локальный вектор нагрузки
        %добавляем ползучесть в нагрузку
        Pe=Pe-
A/3*(matrB((x1+x2)/2, (y1+y2)/2, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, A)+matrB((x1+x3)/2, (y1+y
3)/2, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, A)+matrB((x2+x3)/2, (y2+y3)/2, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3,
b3, c3, A))*D*Int(:,i);
        for j=1:3
            for l=1:3
                P(3*ii(1)+j-3)=P(3*ii(1)+j-3)+Pe(3*l+j-3);
            end
        end
    end
end
%Граничные условия
ne=size(e,2);%количество ребер, попавших на границу
for i=1:ne
    i1=e(1,i);
    P(3*i1-2)=0;
end
U=K\P';
W=zeros(1,np);
for i=1:np
    W(i)=U(3*i-2);
end
%Вычисление напряжений:
Int=zeros(3,nt);
for i=1:nt
    koef;
    x=(x1+x2+x3)/3;
    y=(y1+y2+y3)/3;
    B=matrB(x, y, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, A);
    Ue=zeros(9,1);
    for j=1:3
        for l=1:3
            Ue(3*l+j-3)=U(3*ii(1)+j-3);
        end
    end
end
xi=D*B*Ue;%Вектор кривизн
for j=1:nz+1
    z=-h/2+(j-1)*dz;
    S=-z*xi-D*[ezx(i,j); ezy(i,j); ezxy(i,j)];
    sigma_x(i,j)=S(1);
end

```

```

sigma_y(i,j)=S(2);
tau(i,j)=S(3);
%вычисление высокоэластических деформаций
p0=(S(1)+S(2))/3;
fx=1.5*(S(1)-p0)-Eb*ezx(i,j);
fy=1.5*(S(2)-p0)-Eb*ezy(i,j);
fxy=1.5*S(3)-Eb*ezxy(i,j)/2;
f=max([abs(fx);abs(fy);abs(fxy)]);
n=n0*exp(-f/mz);
ez_x_=fx/n;
ez_y_=fy/n;
ez_xy_=fxy/n;
ezx(i,j)=ezx(i,j)+ez_x_*dt;
ezy(i,j)=ezy(i,j)+ez_y_*dt;
ezxy(i,j)=ezxy(i,j)+2*ez_xy_*dt;
if j~=1&&j~=nz+1
    delt=dz;
else
    delt=dz/2;
end
Int(:,i)=Int(:,i)+[ezx(i,j); ezy(i,j); ezxy(i,j)]*z*delt;
end
end
Wmax(it)=max(W);
clc
proc=fix(it/(nT+1)*100)
end
figure;
plot(Time, Wmax); %Вывод графика роста прогиба

```

Функция Kf.m

```

function Ke=Kf(E, nu, A, a1, b1, c1, a2, b2, c2, a3, b3, c3, x, y)
L1=1/2/A*(a1+b1*x+c1*y);
L2=1/2/A*(a2+b2*x+c2*y);
L3=1/2/A*(a3+b3*x+c3*y);
D=E/(1-nu^2)*[1 nu 0
              nu 1 0
              0 0 (1-nu)/2];
B=[ -(b2*(2*L1*b2 - b1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b1*(b2*(2*L1 - 2*L2) + b1*(2*L2 + 2*L3) + b3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L1*b3 - b1*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A))/(2*A),
    -(b3*(b2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - b1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (b1*(b1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + b3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)) - b2*((L3*b2)/2 - b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (b2*(b3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) + b1*((L3*b2)/2 - b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/(2*A),
    -(b3*(b2*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) - b1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (b1*(b1*(2*L2*c3 - 2*L3*c2) + b3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - b2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (b2*(b3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + b1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/(2*A),
    -(b1*(2*L2*b1 + b2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b2*(b2*(2*L1 + 2*L3) - b1*(2*L1 - 2*L2) + b3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L2*b3 - b2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/(2*A),
    ((b3*(b1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - b2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)) - b1*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + b3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)) - b1*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A),
    ((b3*(b1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) - b2*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (b2*(b2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) + b3*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)) - b1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(b3*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) + b2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/(2*A),
    -(b3*(b1*(2*L1 - 2*L3) - b3*(2*L1 + 2*L2) + b2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b1*(2*L3*b1 + b3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b2*(2*L3*b2 + b3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/(2*A),
    -(b2*(b1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - b3*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (b3*(b3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + b2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)) - b1*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(b2*((L3*b1)/2 -

```

$(L3*b2)/2) + b3*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A)))/(2*A), -$
 $((b2*(b1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) - b3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) -$
 $(b3*(b3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) + b2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - b1*((L2*c1)/2 -$
 $c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(b2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + b3*((L2*c1)/2 -$
 $c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A)))/(2*A)$
 $-((c2*(2*L1*c2 - c1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (c1*(c2*(2*L1 - 2*L2) + c1*(2*L2 +$
 $2*L3) + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (c3*(2*L1*c3 - c1*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A)))/(2*A),$
 $-((c3*(c2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - c1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) -$
 $(c1*(c1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + c3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*b2)/2 -$
 $b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (c2*(c3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) + c1*((L3*b2)/2 -$
 $b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A)))/(2*A), -((c3*(c2*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) -$
 $c1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (c1*(c1*(2*L2*c3 - 2*L3*c2) +$
 $c3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) +$
 $(c2*(c3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + c1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 +$
 $L3/2)))/(2*A)))/(2*A), -((c1*(2*L2*c1 + c2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1 +$
 $2*L3) - c1*(2*L1 - 2*L2) + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (c3*(2*L2*c3 - c2*(2*L2 -$
 $2*L3)))/(2*A)))/(2*A), ((c3*(c1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - c2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2$
 $+ 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1*b3 - 2*L3*b1) + c3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2))$
 $- c1*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (c1*(c3*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) +$
 $c2*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A)))/(2*A), ((c3*(c1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2)$
 $- c2*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) +$
 $c3*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) +$
 $(c1*(c3*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) + c2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 +$
 $L3/2)))/(2*A)))/(2*A), -((c3*(c1*(2*L1 - 2*L3) - c3*(2*L1 + 2*L2) + c2*(2*L2 -$
 $2*L3)))/(2*A) + (c1*(2*L3*c1 + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (c2*(2*L3*c2 + c3*(2*L2$
 $- 2*L3)))/(2*A)))/(2*A), -((c2*(c1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - c3*((L1*b2)/2 -$
 $b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (c3*(c3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + c2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2$
 $+ 2*L3)) - c1*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (c1*(c2*((L3*b1)/2 -$
 $(L3*b2)/2) + c3*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A)))/(2*A), -$
 $((c2*(c1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) - c3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) -$
 $(c3*(c3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) + c2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*c1)/2 -$
 $c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (c1*(c2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + c3*((L2*c1)/2 -$
 $c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A)))/(2*A)$
 $-((b2*(2*L1*c2 - c1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b1*(c2*(2*L1 - 2*L2) + c1*(2*L2 +$
 $2*L3) + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L1*c3 - c1*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A))/A,$
 $-((b3*(c2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - c1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) -$
 $(b1*(c1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + c3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*b2)/2 -$
 $b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (b2*(c3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) + c1*((L3*b2)/2 -$
 $b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/A, -((b3*(c2*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) -$
 $c1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (b1*(c1*(2*L2*c3 - 2*L3*c2) +$
 $c3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) +$
 $(b2*(c3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + c1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/A,$
 $-((b1*(2*L2*c1 + c2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b2*(c2*(2*L1 + 2*L3) - c1*(2*L1 -$
 $2*L2) + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L2*c3 - c2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/A,$
 $((b3*(c1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - c2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) -$
 $(b2*(c2*(2*L1*b3 - 2*L3*b1) + c3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*b1)/2 -$
 $b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(c3*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) + c2*((L3*b1)/2 -$
 $b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/A, ((b3*(c1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) - c2*((L1*c3)/2$
 $- c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (b2*(c2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) + c3*((L1*c3)/2 -$
 $c1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(c3*((L2*c1)/2$
 $- (L2*c3)/2) + c2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/A, -((b3*(c1*(2*L1 -$
 $2*L3) - c3*(2*L1 + 2*L2) + c2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b1*(2*L3*c1 + c3*(2*L1 -$
 $2*L3)))/(2*A) + (b2*(2*L3*c2 + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/A, -$
 $((b2*(c1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - c3*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) -$
 $(b3*(c3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + c2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*b1)/2 -$
 $b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(c2*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) + c3*((L2*b1)/2 -$
 $b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/A, -((b2*(c1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) -$
 $c3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (b3*(c3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) +$
 $c2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*c1)/2 - c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) +$
 $(b1*(c2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + c3*((L2*c1)/2 - c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/A];$

Ke=B'*D*B;

End

Подпрограмма coef.m

```

ii(1)=t(1,i);%Номер первого узла
ii(2)=t(2,i);%Номер второго узла
ii(3)=t(3,i);%Номер третьего узла
%координаты узлов
x1=p(1,ii(1));
y1=p(2,ii(1));
x2=p(1,ii(2));
y2=p(2,ii(2));
x3=p(1,ii(3));
y3=p(2,ii(3));
A=1/2*(det([1 x1 y1
            1 x2 y2
            1 x3 y3]));%Площадь КЭ
a1=x2*y3-x3*y2;
a2=x3*y1-y3*x1;
a3=x1*y2-x2*y1;
b1=y2-y3;
b2=y3-y1;
b3=y1-y2;
c1=x3-x2;
c2=x1-x3;
c3=x2-x1;
D=E/(1-nu^2)*[1 nu 0
              nu 1 0
              0 0 (1-nu)/2];%матрица упругих постоянных

```

Функция matrB.m

```

function B=matrB(x,y,a1,b1,c1,a2,b2,c2,a3,b3,c3,A)
L1=1/2/A*(a1+b1*x+c1*y);
L2=1/2/A*(a2+b2*x+c2*y);
L3=1/2/A*(a3+b3*x+c3*y);
B=[ -(b2*(2*L1*b2 - b1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b1*(b2*(2*L1 - 2*L2) + b1*(2*L2
+ 2*L3) + b3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L1*b3 - b1*(2*L1 -
2*L3)))/(2*A)/(2*A), -(b3*(b2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - b1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1
+ L2/2)))/(2*A) - (b1*(b1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + b3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2))
- b2*((L3*b2)/2 - b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (b2*(b3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) +
b1*((L3*b2)/2 - b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A)/(2*A), -(b3*(b2*((L1*c2)/2 -
(L1*c3)/2) - b1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (b1*(b1*(2*L2*c3 -
2*L3*c2) + b3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - b2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 +
L3/2)))/(2*A) + (b2*(b3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + b1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 +
L3/2)))/(2*A)/(2*A), -(b1*(2*L2*b1 + b2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b2*(b2*(2*L1 +
2*L3) - b1*(2*L1 - 2*L2) + b3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L2*b3 - b2*(2*L2 -
2*L3)))/(2*A)/(2*A), ((b3*(b1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - b2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2
+ 2*L2)))/(2*A) - (b2*(b2*(2*L1*b3 - 2*L3*b1) + b3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2))
- b1*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(b3*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) +
b2*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A)/(2*A), ((b3*(b1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2)
- b2*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (b2*(b2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) +
b3*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)) - b1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) +
(b1*(b3*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) + b2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 +
L3/2)))/(2*A)/(2*A), -(b3*(b1*(2*L1 - 2*L3) - b3*(2*L1 + 2*L2) + b2*(2*L2 -
2*L3)))/(2*A) + (b1*(2*L3*b1 + b3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b2*(2*L3*b2 + b3*(2*L2
- 2*L3)))/(2*A)/(2*A), -(b2*(b1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - b3*((L1*b2)/2 -
b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (b3*(b3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + b2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2
+ 2*L3)) - b1*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(b2*((L3*b1)/2 -
(L3*b2)/2) + b3*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A)/(2*A), -
((b2*(b1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) - b3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) -
(b3*(b3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) + b2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - b1*((L2*c1)/2 -

```

$$\begin{aligned}
& c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(b2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + b3*((L2*c1)/2 - \\
& c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/ (2*A) \\
& - ((c2*(2*L1*c2 - c1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (c1*(c2*(2*L1 - 2*L2) + c1*(2*L2 + \\
& 2*L3) + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (c3*(2*L1*c3 - c1*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A))/ (2*A), \\
& - ((c3*(c2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - c1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - \\
& (c1*(c1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + c3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*b2)/2 - \\
& b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (c2*(c3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) + c1*((L3*b2)/2 - \\
& b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/ (2*A), - ((c3*(c2*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) - \\
& c1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (c1*(c1*(2*L2*c3 - 2*L3*c2) + \\
& c3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + \\
& (c2*(c3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + c1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + \\
& L3/2)))/(2*A))/ (2*A), - ((c1*(2*L2*c1 + c2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1 + \\
& 2*L3) - c1*(2*L1 - 2*L2) + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (c3*(2*L2*c3 - c2*(2*L2 - \\
& 2*L3)))/(2*A))/ (2*A), ((c3*(c1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - c2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 \\
& + 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1*b3 - 2*L3*b1) + c3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)) \\
& - c1*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (c1*(c3*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) + \\
& c2*((L3*b1)/2 - b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/ (2*A), ((c3*(c1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) \\
& - c2*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (c2*(c2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) + \\
& c3*((L1*c3)/2 - c1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + \\
& (c1*(c3*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) + c2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + \\
& L3/2)))/(2*A))/ (2*A), - ((c3*(c1*(2*L1 - 2*L3) - c3*(2*L1 + 2*L2) + c2*(2*L2 - \\
& 2*L3)))/(2*A) + (c1*(2*L3*c1 + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (c2*(2*L3*c2 + c3*(2*L2 \\
& - 2*L3)))/(2*A))/ (2*A), - ((c2*(c1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - c3*((L1*b2)/2 - \\
& b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (c3*(c3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + c2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 \\
& + 2*L3)) - c1*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (c1*(c2*((L3*b1)/2 - \\
& (L3*b2)/2) + c3*((L2*b1)/2 - b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/ (2*A), - \\
& ((c2*(c1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) - c3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - \\
& (c3*(c3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) + c2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*c1)/2 - \\
& c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (c1*(c2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + c3*((L2*c1)/2 - \\
& c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/ (2*A) \\
& - ((b2*(2*L1*c2 - c1*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b1*(c2*(2*L1 - 2*L2) + c1*(2*L2 + \\
& 2*L3) + c3*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L1*c3 - c1*(2*L1 - 2*L3)))/(2*A))/A, \\
& - ((b3*(c2*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) - c1*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - \\
& (b1*(c1*(2*L2*b3 - 2*L3*b2) + c3*((L2*b3)/2 - b2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*b2)/2 - \\
& b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + (b2*(c3*((L1*b2)/2 - (L1*b3)/2) + c1*((L3*b2)/2 - \\
& b3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/A, - ((b3*(c2*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) - \\
& c1*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)))/(2*A) - (b1*(c1*(2*L2*c3 - 2*L3*c2) + \\
& c3*((L2*c3)/2 - c2*(2*L1 + L2/2)) - c2*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A) + \\
& (b2*(c3*((L1*c2)/2 - (L1*c3)/2) + c1*((L3*c2)/2 - c3*(2*L1 + L3/2)))/(2*A))/A, \\
& - ((b1*(2*L2*c1 + c2*(2*L1 - 2*L2)))/(2*A) - (b2*(c2*(2*L1 + 2*L3) - c1*(2*L1 - \\
& 2*L2) + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b3*(2*L2*c3 - c2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/A, \\
& ((b3*(c1*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) - c2*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - \\
& (b2*(c2*(2*L1*b3 - 2*L3*b1) + c3*((L1*b3)/2 - b1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*b1)/2 - \\
& b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(c3*((L2*b1)/2 - (L2*b3)/2) + c2*((L3*b1)/2 - \\
& b3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/A, - ((b3*(c1*((L2*c1)/2 - (L2*c3)/2) - c2*((L1*c3)/2 \\
& - c1*(L1/2 + 2*L2)))/(2*A) - (b2*(c2*(2*L1*c3 - 2*L3*c1) + c3*((L1*c3)/2 - \\
& c1*(L1/2 + 2*L2)) - c1*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A) + (b1*(c3*((L2*c1)/2 \\
& - (L2*c3)/2) + c2*((L3*c1)/2 - c3*(2*L2 + L3/2)))/(2*A))/A, - ((b3*(c1*(2*L1 - \\
& 2*L3) - c3*(2*L1 + 2*L2) + c2*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A) + (b1*(2*L3*c1 + c3*(2*L1 - \\
& 2*L3)))/(2*A) + (b2*(2*L3*c2 + c3*(2*L2 - 2*L3)))/(2*A))/A, - \\
& ((b2*(c1*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) - c3*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - \\
& (b3*(c3*(2*L1*b2 - 2*L2*b1) + c2*((L1*b2)/2 - b1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*b1)/2 - \\
& b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + (b1*(c2*((L3*b1)/2 - (L3*b2)/2) + c3*((L2*b1)/2 - \\
& b2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/A, - ((b2*(c1*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) - \\
& c3*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)))/(2*A) - (b3*(c3*(2*L1*c2 - 2*L2*c1) + \\
& c2*((L1*c2)/2 - c1*(L1/2 + 2*L3)) - c1*((L2*c1)/2 - c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A) + \\
& (b1*(c2*((L3*c1)/2 - (L3*c2)/2) + c3*((L2*c1)/2 - c2*(L2/2 + 2*L3)))/(2*A))/A]; \\
\text{End}
\end{aligned}$$

Расчет полимерной пластинки при помощи двойных тригонометрических рядов

Основной модуль main.m

```

clc;
clear variables;
h=0.02;%толщина, м
E=1480*1000; %Модуль упругости, кПа
Eb=5990*1000; %Модуль высокоэластичности, кПа
mz=12.6*1000; %Модуль скорости, кПа
n0=9.06*10^5*60*1000; %начальная релаксационная вязкости, кПа*с
nu=0.3;%Коэффициент Пуассона
D=E*h^3/12/(1-nu^2);%Цилиндрическая жесткость
q=2;%нагрузка, кПа
%размеры пластины, м
a=0.8;
b=0.6;
nx=50;%количество интервалов по x
ny=50;%количество интервалов по y
nz=50;%количество интервалов по z
dz=h/nz;%шаг по z
nt=80;%количество интервалов по времени
t1=0;%начальный момент времени, с
t2=8*3600; %Конечное время, с
dt=(t2-t1)/nt; %шаг по времени, с
dx=a/nx; %шаг по x
dy=b/ny;%шаг по y
kmax=2;
lmax=2;%Количество членов ряда
d2Mx=zeros(nx+1,ny+1);
d2My=zeros(nx+1,ny+1);
d2H=zeros(nx+1,ny+1);
ezx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
ezy=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
gammaz=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
sigma_x=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
sigma_y=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
tau=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
Wmax=zeros(1,nt+1);
Time=zeros(1,nt+1);
S_x=zeros(1,nt+1);
for it=1:nt+1
Time(it)=(it-1)*dt;
W=zeros(nx+1, ny+1);
D2_W_x=zeros(nx+1, ny+1);
D2_W_y=zeros(nx+1, ny+1);
D2_W_xy=zeros(nx+1,ny+1);
    for k=1:kmax
        for l=1:lmax
            qzmn=0;
            m=2*k-1;
            n=2*l-1;
            for i=1:nx+1
                for j=1:ny+1
                    if
((i==1||i==nx+1)&&j~=1&&j~=ny+1)||((j==1||j==ny+1)&&i~=1&&i~=nx+1)
                        deltax=dx/2;
                    elseif i==1&&j==1||i==nx+1&&j==1||i==1&&j==ny+1||i==nx+1&&j==ny+1
                        deltax=dx/4;
                    else
                        deltax=dx;
                    end
                    x=(i-1)*deltax;
                    y=(j-1)*deltax;

```

```

                qzmn=qzmn-
(d2Mx(i,j)+2*d2H(i,j)+d2My(i,j))*4/a/b*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b)*delt;
            end
        end
        qmn=q*(16*sin((pi*m)/2)^2*sin((pi*n)/2)^2)/(m*n*pi^2);
        Wmn=(qmn+qzmn)/pi^4/D/(m^2/a^2+n^2/b^2)^2;
        for i=1:nx+1
            for j=1:ny+1
                x=(i-1)*dx;
                y=(j-1)*dy;
                W(i,j)=W(i,j)+Wmn*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b);
                D2_W_x(i,j)=D2_W_x(i,j)-
Wmn*(m*pi/a)^2*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b);
                D2_W_y(i,j)=D2_W_y(i,j)-
Wmn*(n*pi/b)^2*sin(m*pi*x/a)*sin(n*pi*y/b);

D2_W_xy(i,j)=D2_W_xy(i,j)+Wmn*(m*pi/a)*(n*pi/b)*cos(m*pi*x/a)*cos(n*pi*y/b);
            end
        end
    end
end

%Вычисление напряжений
Mzx=zeros(nx+1,ny+1);
Mzy=zeros(nx+1,ny+1);
Hz=zeros(nx+1,ny+1);
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        for k=1:nz+1
            z=-h/2+(k-1)*dz;
            sigma_x(i,j,k)=E/(1-nu^2)*(-z*(D2_W_x(i,j)+nu*D2_W_y(i,j))-ezx(i,j)-
nu*ezy(i,j));
            sigma_y(i,j,k)=E/(1-nu^2)*(-z*(D2_W_y(i,j)+nu*D2_W_x(i,j))-ezy(i,j)-
nu*ezx(i,j));
            tau(i,j,k)=E/2/(1+nu)*(-2*z*D2_W_xy(i,j)-gammaz(i,j,k));
            %Вычисление высокоэластических деформаций
            p=(sigma_x(i,j,k)+sigma_y(i,j,k))/3;
            fx=1.5*(sigma_x(i,j,k)-p)-Eb*ezx(i,j,k);
            fy=1.5*(sigma_y(i,j,k)-p)-Eb*ezy(i,j,k);
            fxy=1.5*tau(i,j,k)-Eb*gammaz(i,j,k)/2;
            f=max([abs(fx);abs(fy);abs(fxy)]);
            n=n0*exp(-f/mz);
            ez_x=fx/n;
            ez_y=fy/n;
            ez_xy=fxy/n;
            ezx(i,j,k)=ezx(i,j,k)+ez_x*dt;
            ezy(i,j,k)=ezy(i,j,k)+ez_y*dt;
            gammaz(i,j,k)=gammaz(i,j,k)+2*ez_xy*dt;
            if k~=1&& k~=nz+1
                delt=dz;
            else
                delt=dz/2;
            end
            Mzx(i,j)=Mzx(i,j)+E/(1-nu^2)*(ezx(i,j,k)+nu*ezy(i,j,k))*z*delt;
            Mzy(i,j)=Mzy(i,j)+E/(1-nu^2)*(ezy(i,j,k)+nu*ezx(i,j,k))*z*delt;
            Hz(i,j)=Hz(i,j)+E/2/(1+nu)*gammaz(i,j,k)*z*delt;
        end
    end
end
end
dif2;
clc

```

```

proc=fix(it/(nt+1)*100)
Wmax(it)=max(max(W)); %определение максимального прогиба
end
plot(Time/3600, Wmax, 'r'); %График роста прогиба

```

Подпрограмма dif2.m

```

d2Mx=zeros(nx+1,ny+1);
d2My=zeros(nx+1,ny+1);
d2H=zeros(nx+1,ny+1);
for j=2:nx
    for k=2:ny
        d2Mx(j,k)=1/dx^2*(Mzx(j+1,k)-2*Mzx(j,k)+Mzx(j-1,k));
        d2My(j,k)=1/dy^2*(Mzy(j,k+1)-2*Mzy(j,k)+Mzy(j,k-1));
        d2H(j,k)=(Hz(j+1,k+1)+Hz(j-1,k-1)-Hz(j-1,k+1)-Hz(j+1,k-1))/4/dx/dy;
    end
end
end

```

Расчет круглой полимерной пластины как трехмерного тела в осесимметричной постановке

Подпрограмма символьного вычисления коэффициентов матрицы жесткости и вектора нагрузки для осесимметричного прямоугольного КЭ

```

clc %Очистка командной строки
clear all %Очистка памяти
syms r1 r2 z1 z3 r z nu real %Объявление символьных переменных
%Задаем ограничения на символьные переменные
assume(nu>0);
assumeAlso(nu<0.5);
assume(r1>=0);
assume(z>=0);
assume(r2>0);
assume(r>=0);
assume(z1>=0);
assume(z3>0);
U=[1 r z r*z 0 0 0 0
    0 0 0 0 1 r z r*z];%Поле перемещений
C=[subs(subs(U,r,r1),z,z1);subs(subs(U,r,r2),z,z1);subs(subs(U,r,r2),z,z3);subs(subs(U,r,r1),z,z3)]; %Подстановка в функции перемещений координат узлов
B=[diff(U(1,:),r);U(1,+)/r;diff(U(2,:),z); diff(U(1,:),z)+diff(U(2,:),r)]*C^(-1);
D1=[1-nu nu nu 0
    nu 1-nu nu 0
    nu nu 1-nu 0
    0 0 0 (1-2*nu)/2]; %Матрица упругих постоянных (на E/(1+nu)/(1-2*nu) не умножаем)
K=int(int(B'*D1*B*r,r,r1,r2),z,z1,z3)%Матрица жесткости (потом эту матрицу следует домножить E/(1+nu)/(1-2*nu)*2*pi)
BD=int(int(B'*D1*r,r,r1,r2),z,z1,z3)%Интеграл, входящий в вектор нагрузки

```

Основной модуль main.m

```

clc;
clear variables;
t1=0;%начальный момент времени, с
t2=150*3600; %Конечное время, с
nT=100;%количество интервалов по времени
dt=(t2-t1)/nT;%шаг по времени

```

```

mz=4.44*10^3; %Модуль скорости, кПа
n0=1.8*10^11; %Начальная релаксационная вязкость, кПа*с
Eb=2310*10^3; %Модуль высокоэластичности, кПа
h=0.015; %толщина пливстины, м
R=1; %радиус пластины, м
q=0.1; %нагрузка, кПа
E=3035*10^3; %модуль упругости, кПа
nu=0.3; %коэффициент Пуассона
nz=10; %количество интервалов по z
nr=500; %количество интервалов по радиусу
dr=R/nr; %размер КЭ по R
dz=h/nz; %размер КЭ по z
K=zeros(2*(nr+1)*(nz+1)); %матрица жесткости
BDD=zeros(8,4*nr*nz);
BB=zeros(4,8*nr*nz);
P0=zeros(2*(nr+1)*(nz+1),1); %вектор нагрузки
ind=zeros((nr+1)*(nz+1));
inde=zeros(nr*nz);
k=0;
zero=1e-200;
D=E/(1+nu)/(1-2*nu)*[1-nu nu nu 0
                    nu 1-nu nu 0
                    nu nu 1-nu 0
                    0 0 0 (1-2*nu)/2]; %матрица упругих постоянных

for i=1:nr+1
    for j=1:nz+1
        k=k+1;
        ind(i,j)=k;
    end
end
k=0;
for i=1:nr
    for j=1:nz
        k=k+1;
        inde(i,j)=k;
    end
end
for i=1:nr
    for j=1:nz
        ii(1)=ind(i,j);
        ii(2)=ind(i+1,j);
        ii(3)=ind(i+1,j+1);
        ii(4)=ind(i,j+1);
        if i~=1
            r1=(i-1)*dr;
        else
            r1=zero;
        end
        z1=(j-1)*dz;
        z3=j*dz;
        r2=i*dr;
        r=(i-0.5)*dr;
        z=(j-0.5)*dz;
        BD=E/(1+nu)/(1-2*nu)*2*pi*[ ((z1 - z3)*(r1 + r2 - 2*nu*r2))/4, ((z1 -
z3)*(r1 - r2 + 2*nu*r2))/4, (nu*r1*(z1 - z3))/2, ((2*nu -
1)*(- 2*r1^2 + r1*r2 + r2^2))/12
            (nu*(r1 - r2)*(2*r1 + r2))/6, (nu*(r1 - r2)*(2*r1 + r2))/6, ((nu -
1)*(- 2*r1^2 + r1*r2 + r2^2))/6, -((2*nu - 1)*(r1 + r2)*(z1 - z3))/8
            -((z1 - z3)*(r1 + r2 - 2*nu*r1))/4, -((z1 - z3)*(r2 - r1 + 2*nu*r1))/4,
-(nu*r2*(z1 - z3))/2, -((2*nu - 1)*(r1^2 + r1*r2 - 2*r2^2))/12
            (nu*(r1 - r2)*(r1 + 2*r2))/6, (nu*(r1 - r2)*(r1 + 2*r2))/6, -((nu -
1)*(r1^2 + r1*r2 - 2*r2^2))/6, ((2*nu - 1)*(r1 + r2)*(z1 - z3))/8

```

```

-((z1 - z3)*(r1 + r2 - 2*nu*r1))/4, -((z1 - z3)*(r2 - r1 + 2*nu*r1))/4,
-(nu*r2*(z1 - z3))/2, ((2*nu - 1)*(r1^2 + r1*r2 - 2*r2^2))/12
-(nu*(r1 - r2)*(r1 + 2*r2))/6, -(nu*(r1 - r2)*(r1 + 2*r2))/6, ((nu
- 1)*(r1^2 + r1*r2 - 2*r2^2))/6, ((2*nu - 1)*(r1 + r2)*(z1 - z3))/8
((z1 - z3)*(r1 + r2 - 2*nu*r2))/4, ((z1 - z3)*(r1 - r2 + 2*nu*r2))/4,
(nu*r1*(z1 - z3))/2, -((2*nu - 1)*(- 2*r1^2 + r1*r2 + r2^2))/12
-(nu*(r1 - r2)*(2*r1 + r2))/6, -(nu*(r1 - r2)*(2*r1 + r2))/6, -((nu -
1)*(- 2*r1^2 + r1*r2 + r2^2))/6, -((2*nu - 1)*(r1 + r2)*(z1 - z3))/8];
BDD(:,4*inde(i,j)-3:4*inde(i,j))=BD;
B=[
z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z3/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0,
z3/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0,
z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0,
z1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0
z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z3/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) -
(r2*z)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)) + (r2*z3)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 +
r2*z3)), 0,
z3/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) +
(r1*z)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)) - (r1*z3)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 +
r2*z3)), 0,
z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) -
(r1*z)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)) + (r1*z1)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 +
r2*z3)), 0,
z1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) +
(r2*z)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)) - (r2*z1)/(r*(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 +
r2*z3)), 0
0, r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r2/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0, r1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0, r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
0, r2/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)

r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r2/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3), z/(r1*z1 -
r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z3/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
r1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3), z3/(r1*z1 -
r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3), z/(r1*z1 -
r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z1/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3),
r2/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - r/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3), z1/(r1*z1 -
r2*z1 - r1*z3 + r2*z3) - z/(r1*z1 - r2*z1 - r1*z3 + r2*z3)];
BB(:,8*inde(i,j)-7:8*inde(i,j))=B;
Ke=E/(1+nu)/(1-2*nu)*2*pi*[
(6*r1^2*r2^2 + 8*r1^2*z1^2 + 8*r2^2*z1^2 + 8*r1^2*z3^2 + 8*r2^2*z3^2 - 6*nu*r1^4 +
2*nu*r2^4 - 8*r1^3*r2 + 3*r1^4 - r2^4 + 16*nu*r1^3*r2 - 16*r1*r2*z1^2 -
16*r1*r2*z3^2 - 16*r1^2*z1*z3 - 16*r2^2*z1*z3 - 12*nu*r1^2*r2^2 +
8*r2^2*z1^2*log(r1) - 8*r2^2*z1^2*log(r2) + 8*r2^2*z3^2*log(r1) -
8*r2^2*z3^2*log(r2) - 16*r2^2*z1*z3*log(r1) + 16*r2^2*z1*z3*log(r2) +
32*r1*r2*z1*z3 - 8*nu*r2^2*z1^2*log(r1) + 8*nu*r2^2*z1^2*log(r2) -
8*nu*r2^2*z3^2*log(r1) + 8*nu*r2^2*z3^2*log(r2) + 16*nu*r2^2*z1*z3*log(r1) -
16*nu*r2^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)),
r1/12 + r2/24 + (nu*r1)/6 - (nu*r2)/6,
-(2*nu*r1^4 - 2*nu*r2^4 - 2*r1*r2^3 + 2*r1^3*r2 - r1^4 + r2^4 + 4*nu*r1*r2^3 -
4*nu*r1^3*r2 + 8*r1*r2*z1^2*log(r1) - 8*r1*r2*z1^2*log(r2) + 8*r1*r2*z3^2*log(r1)
- 8*r1*r2*z3^2*log(r2) - 16*r1*r2*z1*z3*log(r1) + 16*r1*r2*z1*z3*log(r2) -
8*nu*r1*r2*z1^2*log(r1) + 8*nu*r1*r2*z1^2*log(r2) - 8*nu*r1*r2*z3^2*log(r1) +
8*nu*r1*r2*z3^2*log(r2) + 16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r1) -
16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)),
((4*nu - 1)*(2*r1 + r2))/24, (r2^4*z1)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 -
2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 +

```


$$\begin{aligned} & (4*r1^2*z1^2 - 6*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2 + 4*r1^2*z3^2 + 4*r2^2*z3^2 + 6*nu*r1^4 - \\ & 2*nu*r2^4 + 8*r1^3*r2 - 3*r1^4 + r2^4 - 16*nu*r1^3*r2 - 8*r1*r2*z1^2 - \\ & 8*r1*r2*z3^2 - 8*r1^2*z1*z3 - 8*r2^2*z1*z3 + 12*nu*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2*log(r1) \\ & - 4*r2^2*z1^2*log(r2) + 4*r2^2*z3^2*log(r1) - 4*r2^2*z3^2*log(r2) - \\ & 8*r2^2*z1*z3*log(r1) + 8*r2^2*z1*z3*log(r2) + 16*r1*r2*z1*z3 - \\ & 4*nu*r2^2*z1^2*log(r1) + 4*nu*r2^2*z1^2*log(r2) - 4*nu*r2^2*z3^2*log(r1) + \\ & 4*nu*r2^2*z3^2*log(r2) + 8*nu*r2^2*z1*z3*log(r1) - \\ & 8*nu*r2^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\ & r1/12 + r2/24 - (nu*r1)/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & r1/12 + r2/24 + (nu*r1)/6 - (nu*r2)/6, \quad -(3*nu*r1^3 + nu*r2^3 - r1*r2^2 + \\ & 5*r1^2*r2 - r1*z1^2 - r2*z1^2 - r1*z3^2 - r2*z3^2 - 3*r1^3 - r2^3 + nu*r1*r2^2 - \\ & 5*nu*r1^2*r2 + 2*nu*r1*z1^2 + 2*nu*r2*z1^2 + 2*nu*r1*z3^2 + 2*nu*r2*z3^2 + \\ & 2*r1*z1*z3 + 2*r2*z1*z3 - 4*nu*r1*z1*z3 - 4*nu*r2*z1*z3)/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\ & -((4*nu - 1)*(r1 + 2*r2))/24, \\ & -((r1 + r2)*(2*r1*r2 - 2*z1*z3 + nu*r1^2 + nu*r2^2 - 2*nu*z1^2 - 2*nu*z3^2 - r1^2 \\ & - r2^2 + z1^2 + z3^2 - 2*nu*r1*r2 + 4*nu*z1*z3))/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\ & - r1/24 - r2/12, \\ & ((r1 + r2)*(4*r1*r2 + 2*z1*z3 + 2*nu*r1^2 + 2*nu*r2^2 + 2*nu*z1^2 + 2*nu*z3^2 - \\ & 2*r1^2 - 2*r2^2 - z1^2 - z3^2 - 4*nu*r1*r2 - 4*nu*z1*z3))/(24*(r1 - r2)*(z1 - \\ & z3)), \\ & (nu*r1)/2 - r2/24 - r1/12, (6*nu*r1^3 + 2*nu*r2^3 - 2*r1*r2^2 + 10*r1^2*r2 + \\ & r1*z1^2 + r2*z1^2 + r1*z3^2 + r2*z3^2 - 6*r1^3 - 2*r2^3 + 2*nu*r1*r2^2 - \\ & 10*nu*r1^2*r2 - 2*nu*r1*z1^2 - 2*nu*r2*z1^2 - 2*nu*r1*z3^2 - 2*nu*r2*z3^2 - \\ & 2*r1*z1*z3 - 2*r2*z1*z3 + 4*nu*r1*z1*z3 + 4*nu*r2*z1*z3)/(24*(r1 - r2)*(z1 - z3)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -(2*nu*r1^4 - 2*nu*r2^4 - 2*r1*r2^3 + 2*r1^3*r2 - r1^4 + r2^4 + 4*nu*r1*r2^3 - \\ & 4*nu*r1^3*r2 + 8*r1*r2*z1^2*log(r1) - 8*r1*r2*z1^2*log(r2) + 8*r1*r2*z3^2*log(r1) \\ & - 8*r1*r2*z3^2*log(r2) - 16*r1*r2*z1*z3*log(r1) + 16*r1*r2*z1*z3*log(r2) - \\ & 8*nu*r1*r2*z1^2*log(r1) + 8*nu*r1*r2*z1^2*log(r2) - 8*nu*r1*r2*z3^2*log(r1) + \\ & 8*nu*r1*r2*z3^2*log(r2) + 16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r1) - \\ & 16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\ & -((4*nu - 1)*(r1 + 2*r2))/24, \\ & -(6*r1^2*r2^2 + 8*r1^2*z1^2 + 8*r2^2*z1^2 + 8*r1^2*z3^2 + 8*r2^2*z3^2 + 2*nu*r1^4 \\ & - 6*nu*r2^4 - 8*r1*r2^3 - r1^4 + 3*r2^4 + 16*nu*r1*r2^3 - 16*r1*r2*z1^2 - \\ & 16*r1*r2*z3^2 - 16*r1^2*z1*z3 - 16*r2^2*z1*z3 - 12*nu*r1^2*r2^2 - \\ & 8*r1^2*z1^2*log(r1) + 8*r1^2*z1^2*log(r2) - 8*r1^2*z3^2*log(r1) + \\ & 8*r1^2*z3^2*log(r2) + 16*r1^2*z1*z3*log(r1) - 16*r1^2*z1*z3*log(r2) + \\ & 32*r1*r2*z1*z3 + 8*nu*r1^2*z1^2*log(r1) - 8*nu*r1^2*z1^2*log(r2) + \\ & 8*nu*r1^2*z3^2*log(r1) - 8*nu*r1^2*z3^2*log(r2) - 16*nu*r1^2*z1*z3*log(r1) + \\ & 16*nu*r1^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\ & (nu*r1)/6 - r2/12 - r1/24 - (nu*r2)/6, \\ & -(4*r1^2*z1^2 - 6*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2 + 4*r1^2*z3^2 + 4*r2^2*z3^2 - 2*nu*r1^4 \\ & + 6*nu*r2^4 + 8*r1*r2^3 + r1^4 - 3*r2^4 - 16*nu*r1*r2^3 - 8*r1*r2*z1^2 - \\ & 8*r1*r2*z3^2 - 8*r1^2*z1*z3 - 8*r2^2*z1*z3 + 12*nu*r1^2*r2^2 - 4*r1^2*z1^2*log(r1) \\ & + 4*r1^2*z1^2*log(r2) - 4*r1^2*z3^2*log(r1) + 4*r1^2*z3^2*log(r2) + \\ & 8*r1^2*z1*z3*log(r1) - 8*r1^2*z1*z3*log(r2) + 16*r1*r2*z1*z3 + \\ & 4*nu*r1^2*z1^2*log(r1) - 4*nu*r1^2*z1^2*log(r2) + 4*nu*r1^2*z3^2*log(r1) - \\ & 4*nu*r1^2*z3^2*log(r2) - 8*nu*r1^2*z1*z3*log(r1) + \\ & 8*nu*r1^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\ & (nu*r2)/2 - r2/12 - r1/24, (r2^4*z1)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\ & 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\ & r2^2*z3^2)) - (r1^4*z1)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + \\ & 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) + \\ & (r1^4*z3)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 \\ & - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) - (r2^4*z3)/(24*(r1^2*z1^2 \\ & - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + \\ & r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) + (nu*r1^4*z1)/(12*(r1^2*z1^2 - \\ & 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 \\ & - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) - (nu*r2^4*z1)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + \\ & r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 \\ & + r2^2*z3^2)) - (nu*r1^4*z3)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\ & 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r2^2*z3^2)) + (nu*r2^4*z3)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1*r2^3*z1)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (r1^3*r2*z1)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1^3*r2*z3)/(12*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1*r2^3*z1)/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1^3*r2*z1)/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1*r2^3*z3)/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1^3*r2*z3)/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1*r2*z1^3*log(r1))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (r1*r2*z1^3*log(r2))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (r1*r2*z3^3*log(r1))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1*r2*z3^3*log(r2))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1*r2*z1^3*log(r1))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1*r2*z1^3*log(r2))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1*r2*z3^3*log(r1))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1*r2*z3^3*log(r2))/(6*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1*r2*z1*z3^2*log(r1))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (r1*r2*z1^2*z3*log(r1))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (r1*r2*z1*z3^2*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (r1*r2*z1^2*z3*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1*r2*z1*z3^2*log(r1))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1*r2*z1^2*z3*log(r1))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) - (nu*r1*r2*z1*z3^2*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)) + (nu*r1*r2*z1^2*z3*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)), \\
& r1/24 + r2/12
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& ((4*nu - 1)*(2*r1 + r2))/24, \\
& -((r1 + r2)*(2*r1*r2 - 2*z1*z3 + nu*r1^2 + nu*r2^2 - 2*nu*z1^2 - 2*nu*z3^2 - r1^2 \\
& - r2^2 + z1^2 + z3^2 - 2*nu*r1*r2 + 4*nu*z1*z3))/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\
& (nu*r1)/6 - r2/12 - r1/24 - (nu*r2)/6, \quad -(nu*r1^3 + 3*nu*r2^3 + 5*r1*r2^2 \\
& - r1^2*r2 - r1*z1^2 - r2*z1^2 - r1*z3^2 - r2*z3^2 - r1^3 - 3*r2^3 - 5*nu*r1*r2^2 + \\
& nu*r1^2*r2 + 2*nu*r1*z1^2 + 2*nu*r2*z1^2 + 2*nu*r1*z3^2 + 2*nu*r2*z3^2 + \\
& 2*r1*z1*z3 + 2*r2*z1*z3 - 4*nu*r1*z1*z3 - 4*nu*r2*z1*z3)/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\
& r1/24 + r2/12 - (nu*r2)/2, (2*nu*r1^3 + 6*nu*r2^3 + 10*r1*r2^2 - 2*r1^2*r2 + \\
& r1*z1^2 + r2*z1^2 + r1*z3^2 + r2*z3^2 - 2*r1^3 - 6*r2^3 - 10*nu*r1*r2^2 + \\
& 2*nu*r1^2*r2 - 2*nu*r1*z1^2 - 2*nu*r2*z1^2 - 2*nu*r1*z3^2 - 2*nu*r2*z3^2 -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r2^2*z3^2) - (nu*r1*r2*z1*z3^2*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 \\
& - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2) + (nu*r1*r2*z1^2*z3*log(r2))/(2*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 \\
& - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2)), \\
& - r1/24 - r2/12, \\
& -(4*r1^2*z1^2 - 6*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2 + 4*r1^2*z3^2 + 4*r2^2*z3^2 - 2*nu*r1^4 \\
& + 6*nu*r2^4 + 8*r1*r2^3 + r1^4 - 3*r2^4 - 16*nu*r1*r2^3 - 8*r1*r2*z1^2 - \\
& 8*r1*r2*z3^2 - 8*r1^2*z1*z3 - 8*r2^2*z1*z3 + 12*nu*r1^2*r2^2 - 4*r1^2*z1^2*log(r1) \\
& + 4*r1^2*z1^2*log(r2) - 4*r1^2*z3^2*log(r1) + 4*r1^2*z3^2*log(r2) + \\
& 8*r1^2*z1*z3*log(r1) - 8*r1^2*z1*z3*log(r2) + 16*r1*r2*z1*z3 + \\
& 4*nu*r1^2*z1^2*log(r1) - 4*nu*r1^2*z1^2*log(r2) + 4*nu*r1^2*z3^2*log(r1) - \\
& 4*nu*r1^2*z3^2*log(r2) - 8*nu*r1^2*z1*z3*log(r1) + \\
& 8*nu*r1^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\
& r1/24 + r2/12 - (nu*r2)/2, \\
& -(6*r1^2*r2^2 + 8*r1^2*z1^2 + 8*r2^2*z1^2 + 8*r1^2*z3^2 + 8*r2^2*z3^2 + 2*nu*r1^4 \\
& - 6*nu*r2^4 - 8*r1*r2^3 - r1^4 + 3*r2^4 + 16*nu*r1*r2^3 - 16*r1*r2*z1^2 - \\
& 16*r1*r2*z3^2 - 16*r1^2*z1*z3 - 16*r2^2*z1*z3 - 12*nu*r1^2*r2^2 - \\
& 8*r1^2*z1^2*log(r1) + 8*r1^2*z1^2*log(r2) - 8*r1^2*z3^2*log(r1) + \\
& 8*r1^2*z3^2*log(r2) + 16*r1^2*z1*z3*log(r1) - 16*r1^2*z1*z3*log(r2) + \\
& 32*r1*r2*z1*z3 + 8*nu*r1^2*z1^2*log(r1) - 8*nu*r1^2*z1^2*log(r2) + \\
& 8*nu*r1^2*z3^2*log(r1) - 8*nu*r1^2*z3^2*log(r2) - 16*nu*r1^2*z1*z3*log(r1) + \\
& 16*nu*r1^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\
& r1/24 + r2/12 - (nu*r1)/6 + (nu*r2)/6, \\
& -(2*nu*r1^4 - 2*nu*r2^4 - 2*r1*r2^3 + 2*r1^3*r2 - r1^4 + r2^4 + 4*nu*r1*r2^3 - \\
& 4*nu*r1^3*r2 + 8*r1*r2*z1^2*log(r1) - 8*r1*r2*z1^2*log(r2) + 8*r1*r2*z3^2*log(r1) \\
& - 8*r1*r2*z3^2*log(r2) - 16*r1*r2*z1*z3*log(r1) + 16*r1*r2*z1*z3*log(r2) - \\
& 8*nu*r1*r2*z1^2*log(r1) + 8*nu*r1*r2*z1^2*log(r2) - 8*nu*r1*r2*z3^2*log(r1) + \\
& 8*nu*r1*r2*z3^2*log(r2) + 16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r1) - \\
& 16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\
& ((4*nu - 1)*(r1 + 2*r2))/24 \\
& \\
& - r1/12 - r2/24, \\
& ((r1 + r2)*(4*r1*r2 + 2*z1*z3 + 2*nu*r1^2 + 2*nu*r2^2 + 2*nu*z1^2 + 2*nu*z3^2 - \\
& 2*r1^2 - 2*r2^2 - z1^2 - z3^2 - 4*nu*r1*r2 - 4*nu*z1*z3))/(24*(r1 - r2)*(z1 - \\
& z3)), \\
& (nu*r2)/2 - r2/12 - r1/24, (2*nu*r1^3 + 6*nu*r2^3 + 10*r1*r2^2 - 2*r1^2*r2 + \\
& r1*z1^2 + r2*z1^2 + r1*z3^2 + r2*z3^2 - 2*r1^3 - 6*r2^3 - 10*nu*r1*r2^2 + \\
& 2*nu*r1^2*r2 - 2*nu*r1*z1^2 - 2*nu*r2*z1^2 - 2*nu*r1*z3^2 - 2*nu*r2*z3^2 - \\
& 2*r1*z1*z3 - 2*r2*z1*z3 + 4*nu*r1*z1*z3 + 4*nu*r2*z1*z3)/(24*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\
& r1/24 + r2/12 - (nu*r1)/6 + (nu*r2)/6, \quad -(nu*r1^3 + 3*nu*r2^3 + 5*r1*r2^2 \\
& - r1^2*r2 - r1*z1^2 - r2*z1^2 - r1*z3^2 - r2*z3^2 - r1^3 - 3*r2^3 - 5*nu*r1*r2^2 + \\
& nu*r1^2*r2 + 2*nu*r1*z1^2 + 2*nu*r2*z1^2 + 2*nu*r1*z3^2 + 2*nu*r2*z3^2 + \\
& 2*r1*z1*z3 + 2*r2*z1*z3 - 4*nu*r1*z1*z3 - 4*nu*r2*z1*z3)/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)), \\
& -((4*nu - 1)*(2*r1 + r2))/24, \\
& -((r1 + r2)*(2*r1*r2 - 2*z1*z3 + nu*r1^2 + nu*r2^2 - 2*nu*z1^2 - 2*nu*z3^2 - r1^2 \\
& - r2^2 + z1^2 + z3^2 - 2*nu*r1*r2 + 4*nu*z1*z3))/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)) \\
& \\
& (4*r1^2*z1^2 - 6*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2 + 4*r1^2*z3^2 + 4*r2^2*z3^2 + 6*nu*r1^4 - \\
& 2*nu*r2^4 + 8*r1^3*r2 - 3*r1^4 + r2^4 - 16*nu*r1^3*r2 - 8*r1*r2*z1^2 - \\
& 8*r1*r2*z3^2 - 8*r1^2*z1*z3 - 8*r2^2*z1*z3 + 12*nu*r1^2*r2^2 + 4*r2^2*z1^2*log(r1) \\
& - 4*r2^2*z1^2*log(r2) + 4*r2^2*z3^2*log(r1) - 4*r2^2*z3^2*log(r2) - \\
& 8*r2^2*z1*z3*log(r1) + 8*r2^2*z1*z3*log(r2) + 16*r1*r2*z1*z3 - \\
& 4*nu*r2^2*z1^2*log(r1) + 4*nu*r2^2*z1^2*log(r2) - 4*nu*r2^2*z3^2*log(r1) + \\
& 4*nu*r2^2*z3^2*log(r2) + 8*nu*r2^2*z1*z3*log(r1) - \\
& 8*nu*r2^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)), \\
& (nu*r1)/2 - r2/24 - r1/12, (r2^4*z1)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - \\
& 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + \\
& r2^2*z3^2) - (r1^4*z1)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + \\
& 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) + \\
& (r1^4*z3)/(24*(r1^2*z1^2 - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 \\
& - 2*r1*r2*z3^2 + r2^2*z1^2 - 2*r2^2*z1*z3 + r2^2*z3^2)) - (r2^4*z3)/(24*(r1^2*z1^2 \\
& - 2*r1^2*z1*z3 + r1^2*z3^2 - 2*r1*r2*z1^2 + 4*r1*r2*z1*z3 - 2*r1*r2*z3^2 +
\end{aligned}$$


```

16*nu*r1*r2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)),
-((4*nu - 1)*(2*r1 + r2))/24,
(6*r1^2*r2^2 + 8*r1^2*z1^2 + 8*r2^2*z1^2 + 8*r1^2*z3^2 + 8*r2^2*z3^2 - 6*nu*r1^4 +
2*nu*r2^4 - 8*r1^3*r2 + 3*r1^4 - r2^4 + 16*nu*r1^3*r2 - 16*r1*r2*z1^2 -
16*r1*r2*z3^2 - 16*r1^2*z1*z3 - 16*r2^2*z1*z3 - 12*nu*r1^2*r2^2 +
8*r2^2*z1^2*log(r1) - 8*r2^2*z1^2*log(r2) + 8*r2^2*z3^2*log(r1) -
8*r2^2*z3^2*log(r2) - 16*r2^2*z1*z3*log(r1) + 16*r2^2*z1*z3*log(r2) +
32*r1*r2*z1*z3 - 8*nu*r2^2*z1^2*log(r1) + 8*nu*r2^2*z1^2*log(r2) -
8*nu*r2^2*z3^2*log(r1) + 8*nu*r2^2*z3^2*log(r2) + 16*nu*r2^2*z1*z3*log(r1) -
16*nu*r2^2*z1*z3*log(r2))/(24*(r1 - r2)^2*(z1 - z3)),
(nu*r2)/6 - r2/24 - (nu*r1)/6 - r1/12

r1/12 + r2/24 - (nu*r1)/2, (6*nu*r1^3 + 2*nu*r2^3 - 2*r1*r2^2 + 10*r1^2*r2 +
r1*z1^2 + r2*z1^2 + r1*z3^2 + r2*z3^2 - 6*r1^3 - 2*r2^3 + 2*nu*r1*r2^2 -
10*nu*r1^2*r2 - 2*nu*r1*z1^2 - 2*nu*r2*z1^2 - 2*nu*r1*z3^2 - 2*nu*r2*z3^2 -
2*r1*z1*z3 - 2*r2*z1*z3 + 4*nu*r1*z1*z3 + 4*nu*r2*z1*z3)/(24*(r1 - r2)*(z1 - z3)),
r1/24 + r2/12,
((r1 + r2)*(4*r1*r2 + 2*z1*z3 + 2*nu*r1^2 + 2*nu*r2^2 + 2*nu*z1^2 + 2*nu*z3^2 -
2*r1^2 - 2*r2^2 - z1^2 - z3^2 - 4*nu*r1*r2 - 4*nu*z1*z3))/(24*(r1 - r2)*(z1 -
z3)),
((4*nu - 1)*(r1 + 2*r2))/24,
-((r1 + r2)*(2*r1*r2 - 2*z1*z3 + nu*r1^2 + nu*r2^2 - 2*nu*z1^2 - 2*nu*z3^2 - r1^2
- r2^2 + z1^2 + z3^2 - 2*nu*r1*r2 + 4*nu*z1*z3))/(12*(r1 - r2)*(z1 - z3)),
(nu*r2)/6 - r2/24 - (nu*r1)/6 - r1/12, - (3*nu*r1^3 + nu*r2^3 - r1*r2^2 +
5*r1^2*r2 - r1*z1^2 - r2*z1^2 - r1*z3^2 - r2*z3^2 - 3*r1^3 - r2^3 + nu*r1*r2^2 -
5*nu*r1^2*r2 + 2*nu*r1*z1^2 + 2*nu*r2*z1^2 + 2*nu*r1*z3^2 + 2*nu*r2*z3^2 +
2*r1*z1*z3 + 2*r2*z1*z3 - 4*nu*r1*z1*z3 - 4*nu*r2*z1*z3)/(12*(r1 - r2)*(z1 -
z3))];
    for l=1:4
        for n=1:4
            for m=0:1
                for p=0:1
                    K(2*ii(l)-m,2*ii(n)-p)=K(2*ii(l)-m,2*ii(n)-p)+Ke(2*l-m,2*n-p);
                end
            end
        end
    end
end
%Накладываем граничные условия и нагрузки
for i=1:nr
    i1=ind(i,nz+1);
    i2=ind(i+1,nz+1);
    r1=(i-1)*dr;
    r2=i*dr;
    rm=(i-0.5)*dr;
    P0(2*i1)=P0(2*i1)-q*dr*pi*rm;
    P0(2*i2)=P0(2*i2)-q*dr*pi*rm;
end
for j=1:nz+1
    k=ind(nr+1,j);
    for m=0:1
        K(2*k-m,:) = 0;
        K(:,2*k-m) = 0;
        K(2*k-m,2*k-m) = 1;
        P0(2*k-m) = 0;
    end
    k=ind(1,j);
    K(2*k-1,:) = 0;
    K(:,2*k-1) = 0;
    K(2*k-1,2*k-1) = 1;
    P0(2*k-1) = 0;
end
end

```

```

K=sparse(K);
Pz=zeros(2*(nr+1)*(nz+1),1);
ez=zeros(4,nr,nz);
Wmax=zeros(1,nT+1);
for it=1:nT+1
    P=P0+Pz;
    for j=1:nz+1
        k=ind(nr+1,j);
        for m=0:1
            P(2*k-m)=0;
        end
        k=ind(1,j);
        P(2*k-1)=0;
    end
    U=K\P;
    w=zeros(nr+1,nz+1);
    for i=1:nr+1
        for j=1:nz+1
            k=ind(i,j);
            w(i,j)=U(2*k);
        end
    end
    sigma_z=zeros(nr,nz);
    sigma_r=zeros(nr,nz);
    sigma_t=zeros(nr,nz);
    tau=zeros(nr,nz);
    Pz=zeros(2*(nr+1)*(nz+1),1);
    for i=1:nr
        for j=1:nz
            ii(1)=ind(i,j);
            ii(2)=ind(i+1,j);
            ii(3)=ind(i+1,j+1);
            ii(4)=ind(i,j+1);
            Ue=zeros(8,1);
            for l=1:4
                for m=0:1
                    Ue(2*l-m)=U(2*ii(l)-m);
                end
            end
            if i~=1
                r1=(i-1)*dr;
            else
                r1=zero;
            end
            B=BB(:,8*inde(i,j)-7:8*inde(i,j));
            S=D*(B*Ue-ez(:,i,j));
            sigma_z(i,j)=S(3);
            sigma_r(i,j)=S(1);
            sigma_t(i,j)=S(2);
            tau(i,j)=S(4);
            %Вычисление деформаций ползучести
            p0=(S(1)+S(2)+S(3))/3;
            f_r=3/2*(S(1)-p0)-Eb*ez(1,i,j);
            f_t=3/2*(S(2)-p0)-Eb*ez(2,i,j);
            f_z=3/2*(S(3)-p0)-Eb*ez(3,i,j);
            f_rz=3/2*S(4)-Eb*ez(4,i,j)/2;
            f_max=max(abs([f_r;f_t;f_z;f_rz]));
            n_z=n0*exp(-f_max/mz);
            if it~=nT+1
                ez(:,i,j)=ez(:,i,j)+1/n_z*[f_r;f_t;f_z;f_rz*2]*dt;
            end
            BD=BDD(:,4*inde(i,j)-3:4*inde(i,j));
            Pze=BD*ez(:,i,j);

```

```

    for l=1:4
        for m=0:1
            Pz(2*ii(l)-m)=Pz(2*ii(l)-m)+Pze(2*l-m);
        end
    end
end
end
end
Wmax(it)=max(max(abs(w))); %максимальный прогиб
clc
proc=fix(it/(nT+1)*100)
end
time=t1:dt:t2;
plot(time/3600, Wmax, 'k'); %график роста прогиба

```

Обработка кривых ползучести полимеров, полученных экспериментально

```

clc;
clear variables;
t=[0 26 40 52 70 98 116 146 170 240 265 288 315 405 452 505 570 625 673 747 770
840 940 1130]; %Точки временного интервала, в которых выполнялись измерения
ez=[0 1.33 1.44 1.54 1.63 1.75 1.85 1.91 1.97 2.19 2.22 2.27 2.35 2.49 2.56 2.69
2.71 2.73 2.78 2.84 2.85 2.95 2.98 3.09]/2*10^(-3); %Вектор деформаций ползучести
tau=28.2*10^(-3); %напряжение, МПа
Eb=1.5*tau/ez(length(ez)); %Модуль высокоэластичности
ez_=zeros(1,length(ez)); %Вектор скоростей роста деформации ползучести
%Численное дифференцирование
for i=1:length(ez)-1
    if i==1
        k=polyfit(t(1:3),ez(1:3),2);
    elseif i==length(ez)
        k=polyfit(t(i-2:i),ez(i-2:i),2);
    else
        k=polyfit(t(i-1:i+1),ez(i-1:i+1),2);
    end
    ez_(i)=2*k(1)*t(i)+k(2);
end
fz=1.5*tau-Eb*ez; %Функция напряжений
nz=zeros(1,length(ez)-1); %Релаксационная вязкость
for i=1:length(ez)-1
    nz(i)=fz(i)/ez_(i);
end
a=polyfit(fz(1:length(ez)-1),log(nz(1:length(nz))),1); %Аппроксимация по методу
наименьших квадратов для определения модуля скорости и начальной релаксационной
вязкости
mz=-1/a(1)
n0=exp(a(2))
plot(fz(1:length(ez)-1),log(nz));
hold on
plot(fz(1:length(ez)-1), a(1)*fz(1:length(ez)-1)+a(2));
%Построение аппроксимированной кривой ползучести
t1=0; %начальный момент времени, час
t2=1130; %Конечный момент времени, час
nt=300; %Количество интервалов по времени
dt=(t2-t1)/nt; %Шаг по времени
eps_z=zeros(1,nt+1); %Аппроксимация на основе ур-я Максвелла-Гуревича
eps_z1=zeros(1,nt+1); %Аппроксимация на основе закона Финдли
time=zeros(1,nt+1);
G0=4.84; %Мгновенный модуль сдвига
for i=1:nt+1
    time(i)=t1+(i-1)*dt;
    fz=1.5*tau-Eb*eps_z(i); %Функция напряжений

```

```

nz=n0*exp(-abs(fz)/mz);%Релаксационная вязкость
if i~=nt+1
eps_z(i+1)=eps_z(i)+fz/nz*dt;
end
Gt=210.57/(43.55+4.86*time(i)^0.25);
eps_z1(i)=tau*(1/Gt-1/G0);
end
figure;
%Вывод графиков
plot(time, eps_z*2);
hold on
plot(t, ez*2);
plot(time,eps_z1);

```

Плоское напряженное состояние ортотропной пластины с учетом ползучести

Основной модуль main.m

```

clc
clear variables
q=1;%нагрузка, кг/мм
I1111=2.02*10^(-4); %Упругая постоянная, мм^2/кг
I2222=1.16*10^(-3); %Упругая постоянная, мм^2/кг
I1122=-0.68*10^(-4); %Упругая постоянная, мм^2/кг
I1212=0.99*10^(-3); %Релаксационная постоянная, мм^2/кг
lambda2=1.87*10^(-4); %Релаксационная постоянная, мм^2/кг
beta2=zeros(3,1); %Релаксационные постоянные, 1/ч
beta2(1)=0.29*10^(-4);
beta2(2)=1.33*10^(-4);
beta2(3)=3.73*10^(-4);
lambda4=4.8*10^(-3); %Релаксационная постоянная, мм^2/кг
beta4=zeros(3,1); %Релаксационные постоянные, 1/ч
beta4(1)=0.28*10^(-4);
beta4(2)=1.29*10^(-4);
beta4(3)=3.37*10^(-4);
E1=1/I1111;
E2=1/I2222;
G=1/4/I1212;
nu1=-I1122/I1111;
nu2=-I1122/I2222;
D=1/(1-nu1*nu2)*[E1 E1*nu2 0
                 E2*nu1 E2 0
                 0 0 G*(1-nu1*nu2)];%матрица упругих постоянных
t1=0;%начальный момент времени, ч
t2=50000;%Конечное время, ч
nT=200;%количество интервалов по времени
dt=(t2-t1)/nT;%шаг по времени
a=40;%размеры четверти пластины, мм
b=40;
R=10;%радиус отверстия
%определение геометрии области
g=[2 2 2 2
   R a a 0
   a a 0 0
   0 0 b b
   0 b b R
   1 1 1 1
   0 0 0 0 ];
nfi=40;%количество сегментов, на которые разбивается отверстие
g1=zeros(7,nfi);
dfi=pi/2/nfi;

```

```

for i=1:nfi
    fi1=(i-1)*dfi;
    fi2=i*dfi;
    x1=R*cos(fi1);
    x2=R*cos(fi2);
    y1=R*sin(fi1);
    y2=R*sin(fi2);
    g1(:,i)=[2 x1 x2 y1 y2 1 0]';
end
g=[g,g1];
[p,e,t]=initmesh(g, 'Hmax', a/30);
%pdemesh(p,e,t);
np=size(p,2);%Количество узлов
nt=size(t,2);%Количество элементов
ne=size(e,2);%Количество ребер
%Программирование МКЭ
K=zeros(2*np);%матрица жесткости
%Формируем глоб. матрицу жесткости
Bbig=zeros(3,6*nt);
Area=zeros(1,nt);
for i=1:nt
    prep;
    Bbig(:,6*i-5:6*i)=B;
    Area(i)=A;
    Ke=B'*D*B*A;
    for j=0:1
        for k=0:1
            for l=1:3
                for m=1:3
                    K(2*ii(l)-j,2*ii(m)-k)=K(2*ii(l)-j,2*ii(m)-k)+Ke(2*l-j,2*m-k);
                end
            end
        end
    end
end
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i);
    ii(2)=e(2,i);
    x1=p(1,ii(1));%координата x первого узла
    x2=p(1,ii(2));%координата x второго узла
    y1=p(2,ii(1));%координата y первого узла
    y2=p(2,ii(2));%координата y второго узла
    if x1==0&&x2==0
        for j=1:2
            K(2*ii(j)-1,:)=0;
            K(:,2*ii(j)-1)=0;
            K(2*ii(j)-1,2*ii(j)-1)=1;
        end
    end
    if y1==0&&y2==0
        for j=1:2
            K(2*ii(j),:)=0;
            K(:,2*ii(j))=0;
            K(2*ii(j),2*ii(j))=1;
        end
    end
end
K=sparse(K);
perm=symamd(K);%перестановка строк по алгоритму Катхилла-Макки
K1=chol(K(perm,perm));%разложение матрицы жесткости по Холецкому
Umax=zeros(1,nT+1);
sx=zeros(1,nT+1);
sy=zeros(1,nT+1);

```

```

txy=zeros(1,nT+1);
ez_x=zeros(1,nt);
ez_y=zeros(1,nt);
ezy=zeros(3,nt);
gz=zeros(3,nt);
gammaz=zeros(1,nt);
for it=1:nT+1
    P=zeros(2*np,1);%вектор нагрузки
    for i=1:nt
        ii(1)=t(1,i);%номер первого узла
        ii(2)=t(2,i);%номер второго узла
        ii(3)=t(3,i);%номер третьего узла
        B=Bbig(:,6*i-5:6*i);
        A=Area(i);
        Pe=B'*D*A*[ez_x(i);ez_y(i);gammaz(i)];
        for j=0:1
            for l=1:3
                P(2*ii(l)-j)=P(2*ii(l)-j)+Pe(2*l-j);
            end
        end
    end
end
for i=1:ne
    ii(1)=e(1,i);
    ii(2)=e(2,i);
    x1=p(1,ii(1));%координата x первого узла
    x2=p(1,ii(2));%координата x второго узла
    y1=p(2,ii(1));%координата y первого узла
    y2=p(2,ii(2));%координата y второго узла
    if x1==0&&x2==0
        for j=1:2
            P(2*ii(j)-1)=0;
        end
    end
    if y1==0&&y2==0
        for j=1:2
            P(2*ii(j))=0;
        end
    end
    if x1==a&&x2==a
        l=abs(y2-y1);
        for j=1:2
            P(2*ii(j)-1)=P(2*ii(j)-1)+q*l/2;
        end
    end
end
end
Y=K1'\P(perm);
U=K1\Y;
U(perm)=U;
u=zeros(np,1);
v=zeros(np,1);
for i=1:np
    u(i)=U(2*i-1);
    v(i)=U(2*i);
end
Umax(it)=max(abs(u));
sigma_x=zeros(1,nt);
sigma_y=zeros(1,nt);
tau=zeros(1,nt);

for i=1:nt
    %prep;
    ii(1)=t(1,i);%номер первого узла
    ii(2)=t(2,i);%номер второго узла

```

```

ii(3)=t(3,i);%номер третьего узла
B=Bbig(:,6*i-5:6*i);
Ue=zeros(4,1);
for j=0:1
    for l=1:3
        Ue(2*l-j)=U(2*ii(l)-j);
    end
end
S=D*(B*Ue-[ez_x(i);ez_y(i);gammaz(i)]);
sigma_x(i)=S(1);
sigma_y(i)=S(2);
tau(i)=S(3);
%вычисление высокоэластических деформаций
%вычисление деформаций ползучести
ez_y(i)=0;
gammaz(i)=0;
for m=1:3
    ey_=beta2(m)*(lambda2/3*sigma_y(i)-ezy(m,i));
    ezy(m,i)=ezy(m,i)+ey_*dt;
    g_=2*beta4(m)*(2*lambda4/3*tau(i)-gz(m,i));
    gz(m,i)=gz(m,i)+g_*dt;
    ez_y(i)=ez_y(i)+ezy(m,i);
    gammaz(i)=gammaz(i)+gz(m,i);
end
end
sx(it)=max(abs(sigma_x));
sy(it)=max(abs(sigma_y));
txy(it)=max(abs(tau));
clc
proc=fix(it/(nT+1)*100)
end
time=0:dt:t2;
figure;
plot(time, Umax); %График роста перемещений

```

Подпрограмма prer.m

```

ii(1)=t(1,i);%номер первого узла
ii(2)=t(2,i);%номер второго узла
ii(3)=t(3,i);%номер третьего узла
%координаты узлов
xi=p(1,ii(1));
yi=p(2,ii(1));
xj=p(1,ii(2));
yj=p(2,ii(2));
xk=p(1,ii(3));
yk=p(2,ii(3));
bi=yj-yk;
bj=yk-yi;
bk=yi-yj;
ci=xk-xj;
cj=xi-xk;
ck=xj-xi;
A=0.5*det([1 xi yi
           1 xj yj
           1 xk yk]);%площадь КЭ
B=[bi 0 bj 0 bk 0
   0 ci 0 cj 0 ck
   ci bi cj bj ck bk]/2/A;

```

Конечно-элементное моделирование ползучести трехслойных пластин

Основной модуль main.m

```

clc
clear variables
h=0.08;%толщина плиты, м
E=2*10^8;%модуль упругости обшивок, кН/м^2
mu=0.3;%коэффициент Пуассона обшивок
tv=0.0015;%толщина верхней обшивки, м
tn=0.0015;%толщина нижней обшивки, м
Gz=4.85*10^3;%модуль сдвига заполнителя, кН/м2
Eb=27.38*10^3;%модуль высокоэластичности, кН/м2
q=10;%нагрузка, кПа
%размеры пластины, м
a=2;
b=4;
nx=30;%количество интервалов по x
ny=30;%количество интервалов по y
n0=5.96e5;%кН*сут/м2
mz=21.8;%кПа
t1=0;%начальный момент времени
t2=0.5;%конечный момент времени
nT=500;%количество интервалов по времени
dt=(t2-t1)/nT;%шаг по времени
np=(nx+1)*(ny+1);% количество узлов
%размеры КЭ
dx=a/nx;
dy=b/ny;
ind=zeros((nx+1),(ny+1));
k=1;
X_=zeros((nx+1)*(ny+1));
Y_=zeros((nx+1)*(ny+1));
for i=1:nx+1
    for j=1:ny+1
        ind(i,j)=k;
        k=k+1;
        X_(i,j)=(i-1)*dx;
        Y_(i,j)=(j-1)*dy;
    end
end
end
t=zeros(4,nx*ny);
nt=0;
P0=zeros(5*np,1);%вектор нагрузки
for i=1:nx
    for j=1:ny
        ii(1)=ind(i,j);
        ii(2)=ind(i+1,j);
        ii(3)=ind(i+1,j+1);
        ii(4)=ind(i,j+1);
        nt=nt+1;
        for k=1:4
            t(k,nt)=ii(k);
        end
        for p=1:4
            P0(5*ii(p))=P0(5*ii(p))+q*dx*dy/4;
        end
    end
end
end
Ke=matrK(dx,dy,h,tv,tn,E,Gz,mu); %локальная матрица жесткости
K=sparse(5*np,5*np);
disp('Сборка матрицы жесткости...');
tic
for j=0:4
    for k=0:4

```

```

    for l=1:4
        for m=1:4
            K=K+sparse(5*t(1,:)-j,5*t(m,:)-k,Ke(5*l-j,5*m-k),5*np,5*np);
        end
    end
end
end
%Наложение граничных условий
iw=zeros(1,np);%номера узлов, в которых прогиб равен 0
iu=zeros(1,np);%номера узлов, в которых un=0
iv=zeros(1,np);%номера узлов, в которых vn=0
nw=0;%Количество узлов, в которых прогиб равен 0;
nu=0;
nv=0;
for i=1:nx+1
    k=ind(i,1);
    nw=nw+1;
    nu=nu+1;
    iw(nw)=k;
    iu(nu)=k;
    k=ind(i,ny+1);
    nw=nw+1;
    nu=nu+1;
    iu(nu)=k;
    iw(nw)=k;
end
for j=1:ny+1
    k=ind(1,j);
    nw=nw+1;
    nv=nv+1;
    iv(nv)=k;
    iw(nw)=k;
    k=ind(nx+1,j);
    nv=nv+1;
    iv(nv)=k;
    nw=nw+1;
    iw(nw)=k;
end
iw=iw(1:nw);
K(5*iw,:)=0;
K(:,5*iw)=0;
K=K+sparse(5*iw,5*iw,ones(1,nw),5*np,5*np);
iv=iv(1:nv);
K(5*iv-3,:)=0;
K(:,5*iv-3)=0;
K=K+sparse(5*iv-3,5*iv-3,ones(1,nv),5*np,5*np);
K(5*iv-1,:)=0;
K(:,5*iv-1)=0;
K=K+sparse(5*iv-1,5*iv-1,ones(1,nv),5*np,5*np);
iu=iu(1:nv);
K(5*iu-4,:)=0;
K(:,5*iu-4)=0;
K=K+sparse(5*iu-4,5*iu-4,ones(1,nv),5*np,5*np);
K(5*iu-2,:)=0;
K(:,5*iu-2)=0;
K=K+sparse(5*iu-2,5*iu-2,ones(1,nv),5*np,5*np);
toc
disp('Разложение матрицы жесткости...');
tic
perm=symamd(K);
K1=chol(K(perm,perm));
toc
W=zeros((nx+1)*(ny+1));

```

```

u_n=zeros((nx+1)*(ny+1));
u_v=zeros((nx+1)*(ny+1));
fz;
sigma_x_n=zeros(nx,ny);
sigma_x_v=zeros(nx,ny);
sigma_y_n=zeros(nx,ny);
sigma_y_v=zeros(nx,ny);
gamma_zx=zeros(nx,ny);
gamma_zy=zeros(nx,ny);
tau_x=zeros(nx,ny);
tau_y=zeros(nx,ny);
tau_n=zeros(nx,ny);
tau_v=zeros(nx,ny);
B=matrB(0,0,dx,dy,h);
E1=E/(1-mu^2);
D=[tn*E1 tn*E1*mu 0 0 0 0 0 0
   tn*E1*mu tn*E1 0 0 0 0 0 0
   0 0 tn*E/2/(1+mu) 0 0 0 0 0
   0 0 0 tv*E1 tv*E1*mu 0 0 0
   0 0 0 tv*E1*mu tv*E1 0 0 0
   0 0 0 0 0 tv*E/2/(1+mu) 0 0
   0 0 0 0 0 0 Gz*h 0
   0 0 0 0 0 0 0 Gz*h];%Матрица упругих постоянных
Wmax=zeros(1,nT+1);
Sx=zeros(1,nT+1);
Sy=zeros(1,nT+1);
tx=zeros(1,nT+1);
ty=zeros(1,nT+1);
txy=zeros(1,nT+1);
for it=1:nT+1
    clc;
    proc=fix(it/(nT+1)*100)%процент выполнения программы
    P=zeros(5*np,1);
    for i=1:nx
        for j=1:ny
            Pe=BD*[0 0 0 0 0 0 gamma_zx(i,j) gamma_zy(i,j)]';%локальный вектор
нагрузки
            ii(1)=ind(i,j);
            ii(2)=ind(i+1,j);
            ii(3)=ind(i+1,j+1);
            ii(4)=ind(i,j+1);
            for k=0:4
                for n=1:4
                    P(5*ii(n)-k)=P(5*ii(n)-k)+Pe(5*n-k);
                end
            end
        end
    end
    P=P+P0;
    P(5*iw)=0;
    P(5*iu-4)=0;
    P(5*iv-3)=0;
    P(5*iu-2)=0;
    P(5*iv-1)=0;
    Y=K1'\P(perm);
    U=K1\Y;
    U(perm)=U;
    for i=1:nx+1
        for j=1:ny+1
            k=ind(i,j);
            W(i,j)=U(5*k);
            u_n(i,j)=U(5*k-4);
        end
    end

```

```

end
%Вычисление напряжений
for i=1:nx
    for j=1:ny
        Ue=zeros(20,1);
        ii(1)=ind(i,j);
        ii(2)=ind(i+1,j);
        ii(3)=ind(i+1,j+1);
        ii(4)=ind(i,j+1);
        for k=0:4
            for n=1:4
                Ue(5*n-k)=U(5*ii(n)-k);
            end
        end
        S=D*(B*Ue-[0 0 0 0 0 0 gamma_zx(i,j) gamma_zy(i,j)]');
        tau_x(i,j)=S(7)/h;
        tau_y(i,j)=S(8)/h;
        sigma_x_n(i,j)=S(1)/tn;
        sigma_y_n(i,j)=S(2)/tn;
        tau_n(i,j)=S(3)/tn;
        sigma_x_v(i,j)=S(4)/tv;
        sigma_y_v(i,j)=S(5)/tv;
        tau_v(i,j)=S(6)/tv;
        fx=3/2*tau_x(i,j)-Eb*gamma_zx(i,j)/2;
        fy=3/2*tau_y(i,j)-Eb*gamma_zy(i,j)/2;
        fz=max([abs(fx);abs(fy)]);
        nz=n0*exp(-abs(fz/mz));
        gamma_zx(i,j)=gamma_zx(i,j)+2*fx/nz*dt;
        gamma_zy(i,j)=gamma_zy(i,j)+2*fy/nz*dt;
    end
end
end
Sx(it)=max(max(abs(sigma_x_n)));
Sy(it)=max(max(abs(sigma_y_n)));
Wmax(it)=max(max(abs(W)));
tx(it)=max(max(abs(tau_x)));
ty(it)=max(max(abs(tau_y)));
txy(it)=max(max(abs(tau_n)));
end
time=t1:dt:t2;
plot(time,Wmax*1000);%График роста прогиба

```

Подпрограмма вычисления локальной матрицы жесткости matrK.m

```

function K=matrK(a,b, h, tv, tn, E, Gz, nu)
K=[ - (a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + (E*h*tn)/6 - (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2
- 1)) - (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)),
-(E*tn)/(8*(nu - 1)),
-(Gz*a*b)/(9*h),
0, -(Gz*b)/6, (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 -
(Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),
-(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)),
-(Gz*a*b)/(18*h),
0, (Gz*b)/6, (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 -
(Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),
(E*tn)/(8*(nu - 1)),
-(Gz*a*b)/(36*h),
0, (Gz*b)/12, - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 -
(E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)),
(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)),
-(Gz*a*b)/(18*h),
0, -(Gz*b)/12

```

$$\begin{aligned}
& - (E*tn)/(8*(nu - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tn)/6 - \\
& (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(9*h), \quad - (Gz*a)/6, \\
& (E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 - \\
& (E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \quad - (Gz*a)/12, \\
& (E*tn)/(8*(nu - 1)), \quad (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(36*h), \quad (Gz*a)/12, \\
& - (E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \quad (Gz*a)/6 \\
& \\
& - (Gz*a*b)/(9*h), \\
& 0, \quad - (a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 - (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2 \\
& - 1)) - (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)), \\
& - (E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad (Gz*b)/6, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 - \\
& (E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& - (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad - (Gz*b)/6, \\
& - (Gz*a*b)/(36*h), \\
& 0, \quad (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 - (Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 + \\
& (E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad - (Gz*b)/12, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 - (E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2 \\
& - 1)) - (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (Gz*b)/12 \\
& \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(9*h), \\
& - (E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 - \\
& (E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/6, \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \\
& (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 - \\
& (E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/12, \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(36*h), \\
& (E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 + (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& - (Gz*a)/12, \\
& 0, \\
& - (Gz*a*b)/(18*h), \\
& - (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 - (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& - (Gz*a)/6 \\
& \\
& - (Gz*b)/6, \\
& - (Gz*a)/6, \\
& (Gz*b)/6, \\
& (Gz*a)/6, \quad (Gz*h*(a^2 + b^2))/(3*a*b), \\
& - (Gz*b)/6, \\
& - (Gz*a)/12, \\
& (Gz*b)/6,
\end{aligned}$$

$(Gz*a)/12, (Gz*h*(a^2 - 2*b^2))/(6*a*b),$
 $-(Gz*b)/12,$
 $-(Gz*a)/12,$
 $(Gz*b)/12,$
 $(Gz*a)/12, -(Gz*h*(a^2 + b^2))/(6*a*b),$
 $-(Gz*b)/12,$
 $-(Gz*a)/6,$
 $(Gz*b)/12,$
 $(Gz*a)/6, -(Gz*h*(2*a^2 - b^2))/(6*a*b)$
 $(E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 -$
 $(E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),$
 $(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)),$
 $-(Gz*a*b)/(18*h),$
 $0, -(Gz*b)/6, -(a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 +$
 $(E*h*tn)/6 - (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)),$
 $(E*tn)/(8*(nu - 1)),$
 $-(Gz*a*b)/(9*h),$
 $0, (Gz*b)/6, -(a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 -$
 $(E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)),$
 $-(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)),$
 $-(Gz*a*b)/(18*h),$
 $0, (Gz*b)/12, (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 -$
 $(Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),$
 $-(E*tn)/(8*(nu - 1)),$
 $-(Gz*a*b)/(36*h),$
 $0, -(Gz*b)/12$

$(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), -(b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 -$
 $(E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)),$
 $0,$
 $-(Gz*a*b)/(18*h), -(Gz*a)/12,$
 $(E*tn)/(8*(nu - 1)), -(b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tn)/6 -$
 $(E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)),$
 $0,$
 $-(Gz*a*b)/(9*h), -(Gz*a)/6,$
 $(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 -$
 $(Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)),$
 $0,$
 $-(Gz*a*b)/(18*h), (Gz*a)/6,$
 $-(E*tn)/(8*(nu - 1)), (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 -$
 $(Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)),$
 $0,$
 $-(Gz*a*b)/(36*h), (Gz*a)/12$

$-(Gz*a*b)/(18*h),$
 $0, (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 -$
 $(E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),$
 $(E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), (Gz*b)/6,$
 $-(Gz*a*b)/(9*h),$
 $0, -(a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 - (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2$
 $- 1)) - (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)),$
 $(E*tv)/(8*(nu - 1)), -(Gz*b)/6,$
 $-(Gz*a*b)/(18*h),$
 $0, -(a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 - (E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2$
 $- 1)) - (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)),$
 $-(E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), -(Gz*b)/12,$
 $-(Gz*a*b)/(36*h),$
 $0, (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 - (Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 +$
 $(E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)),$
 $-(E*tv)/(8*(nu - 1)), (Gz*b)/12$

$0,$
 $-(Gz*a*b)/(18*h),$

$$\begin{aligned}
& -(E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), - (b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 - \\
& (E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/12, \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(9*h), \\
& (E*tv)/(8*(nu - 1)), - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 - \\
& (E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/6, \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 - (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a)/6, \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& -(E*tv)/(8*(nu - 1)), (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 + (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a)/12 \\
& \\
& (Gz*b)/6, \\
& -(Gz*a)/12, \\
& -(Gz*b)/6, \\
& (Gz*a)/12, (Gz*h*(a^2 - 2*b^2))/(6*a*b), \\
& (Gz*b)/6, \\
& -(Gz*a)/6, \\
& -(Gz*b)/6, \\
& (Gz*a)/6, (Gz*h*(a^2 + b^2))/(3*a*b), \\
& (Gz*b)/12, \\
& -(Gz*a)/6, \\
& -(Gz*b)/12, \\
& (Gz*a)/6, -(Gz*h*(2*a^2 - b^2))/(6*a*b), \\
& (Gz*b)/12, \\
& -(Gz*a)/12, \\
& -(Gz*b)/12, \\
& (Gz*a)/12, -(Gz*h*(a^2 + b^2))/(6*a*b) \\
& (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 - (Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + \\
& (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tn)/(8*(nu - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& 0, \\
& -(Gz*b)/12, - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 - \\
& (E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \\
& (Gz*b)/12, - (a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + \\
& (E*h*tn)/6 - (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)), \\
& -(E*tn)/(8*(nu - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(9*h), \\
& 0, \\
& (Gz*b)/6, (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - \\
& (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& -(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \\
& -(Gz*b)/6 \\
& \\
& (E*tn)/(8*(nu - 1)), (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& -(Gz*a)/12, \\
& -(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& -(Gz*a)/6, \\
& -(E*tn)/(8*(nu - 1)), - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tn)/6 - \\
& (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)),
\end{aligned}$$

$0,$
 $-(Gz^*a*b)/(9*h), \quad (Gz^*a)/6,$
 $(E^*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), - (b*((Gz^*a^2)/18 - (Gz^*a^2*nu^2)/18 -$
 $(E^*h*tn)/6 + (E^*h*nu*tn)/6))/(a^*h*(nu^2 - 1)) - (E^*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)),$
 $0,$
 $-(Gz^*a*b)/(18*h), \quad (Gz^*a)/12$

 $-(Gz^*a*b)/(36*h),$
 $0, (E^*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz^*b^2)/36 - (Gz^*b^2*nu^2)/36 - (E^*h*tv)/12 +$
 $(E^*h*nu*tv)/12))/(b^*h*(nu^2 - 1)),$
 $(E^*tv)/(8*(nu - 1)), \quad (Gz^*b)/12,$
 $-(Gz^*a*b)/(18*h),$
 $0, - (a*((Gz^*b^2)/18 - (Gz^*b^2*nu^2)/18 - (E^*h*tv)/6 + (E^*h*nu*tv)/6))/(b^*h*(nu^2$
 $- 1)) - (E^*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)),$
 $(E^*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad -(Gz^*b)/12,$
 $-(Gz^*a*b)/(9*h),$
 $0, - (a*((Gz^*b^2)/9 - (Gz^*b^2*nu^2)/9 + (E^*h*tv)/6 - (E^*h*nu*tv)/6))/(b^*h*(nu^2$
 $- 1)) - (E^*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)),$
 $-(E^*tv)/(8*(nu - 1)), \quad -(Gz^*b)/6,$
 $-(Gz^*a*b)/(18*h),$
 $0, (E^*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz^*b^2)/18 - (Gz^*b^2*nu^2)/18 + (E^*h*tv)/12 -$
 $(E^*h*nu*tv)/12))/(b^*h*(nu^2 - 1)),$
 $-(E^*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (Gz^*b)/6$

 $0,$
 $-(Gz^*a*b)/(36*h),$
 $(E^*tv)/(8*(nu - 1)), (E^*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz^*a^2)/36 -$
 $(Gz^*a^2*nu^2)/36 - (E^*h*tv)/12 + (E^*h*nu*tv)/12))/(a^*h*(nu^2 - 1)),$
 $(Gz^*a)/12,$
 $0,$
 $-(Gz^*a*b)/(18*h),$
 $-(E^*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), (E^*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz^*a^2)/18 -$
 $(Gz^*a^2*nu^2)/18 + (E^*h*tv)/12 - (E^*h*nu*tv)/12))/(a^*h*(nu^2 - 1)),$
 $(Gz^*a)/6,$
 $0,$
 $-(Gz^*a*b)/(9*h),$
 $-(E^*tv)/(8*(nu - 1)), - (b*((Gz^*a^2)/9 - (Gz^*a^2*nu^2)/9 + (E^*h*tv)/6 -$
 $(E^*h*nu*tv)/6))/(a^*h*(nu^2 - 1)) - (E^*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)),$
 $-(Gz^*a)/6,$
 $0,$
 $-(Gz^*a*b)/(18*h),$
 $(E^*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), - (b*((Gz^*a^2)/18 - (Gz^*a^2*nu^2)/18 -$
 $(E^*h*tv)/6 + (E^*h*nu*tv)/6))/(a^*h*(nu^2 - 1)) - (E^*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)),$
 $-(Gz^*a)/12$

 $(Gz^*b)/12,$
 $(Gz^*a)/12,$
 $-(Gz^*b)/12,$
 $-(Gz^*a)/12, \quad -(Gz^*h*(a^2 + b^2))/(6*a*b),$
 $(Gz^*b)/12,$
 $(Gz^*a)/6,$
 $-(Gz^*b)/12,$
 $-(Gz^*a)/6, \quad -(Gz^*h*(2*a^2 - b^2))/(6*a*b),$
 $(Gz^*b)/6,$
 $(Gz^*a)/6,$
 $-(Gz^*b)/6,$
 $-(Gz^*a)/6, \quad (Gz^*h*(a^2 + b^2))/(3*a*b),$
 $(Gz^*b)/6,$
 $(Gz^*a)/12,$
 $-(Gz^*b)/6,$
 $-(Gz^*a)/12, \quad (Gz^*h*(a^2 - 2*b^2))/(6*a*b)$
 $- (a*((Gz^*b^2)/18 - (Gz^*b^2*nu^2)/18 - (E^*h*tn)/6 + (E^*h*nu*tn)/6))/(b^*h*(nu^2 -$
 $1)) - (E^*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)),$

$$\begin{aligned}
& -(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad -(Gz*b)/12, \quad (E*b*tn)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 - \\
& (Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& -(E*tn)/(8*(nu - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& 0, \quad (Gz*b)/12, \quad (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - \\
& (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad (Gz*b)/6, \quad - (a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + \\
& (E*h*tn)/6 - (E*h*nu*tn)/6))/(b*h*(nu^2 - 1)) - (E*b*tn)/(3*a*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tn)/(8*(nu - 1)), \\
& -(Gz*a*b)/(9*h), \\
& 0, \quad -(Gz*b)/6 \\
& (E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tn)/12 - (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \quad -(Gz*a)/6, \\
& -(E*tn)/(8*(nu - 1)), \quad (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tn)/12 + (E*h*nu*tn)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \quad -(Gz*a)/12, \\
& -(E*tn*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 - \\
& (E*h*tn)/6 + (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(6*b*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \quad (Gz*a)/12, \\
& (E*tn)/(8*(nu - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tn)/6 - \\
& (E*h*nu*tn)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tn)/(3*b*(nu^2 - 1)), \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(9*h), \quad (Gz*a)/6 \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 - (E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2 \\
& - 1)) - (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)), \\
& -(E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (Gz*b)/12, \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& 0, \quad (E*b*tv)/(6*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/36 - (Gz*b^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 + \\
& (E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& -(E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad -(Gz*b)/12, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& 0, \quad (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)) - (a*((Gz*b^2)/18 - (Gz*b^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 - \\
& (E*h*nu*tv)/12))/(b*h*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad -(Gz*b)/6, \\
& -(Gz*a*b)/(9*h), \\
& 0, \quad - (a*((Gz*b^2)/9 - (Gz*b^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 - (E*h*nu*tv)/6))/(b*h*(nu^2 \\
& - 1)) - (E*b*tv)/(3*a*(nu^2 - 1)), \\
& (E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad (Gz*b)/6 \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& (E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/18 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/18 + (E*h*tv)/12 - (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/6, \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(36*h), \\
& -(E*tv)/(8*(nu - 1)), \quad (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)) - (b*((Gz*a^2)/36 - \\
& (Gz*a^2*nu^2)/36 - (E*h*tv)/12 + (E*h*nu*tv)/12))/(a*h*(nu^2 - 1)), \\
& (Gz*a)/12, \\
& 0, \\
& -(Gz*a*b)/(18*h), \\
& -(E*tv*(3*nu - 1))/(8*(nu^2 - 1)), \quad - (b*((Gz*a^2)/18 - (Gz*a^2*nu^2)/18 -
\end{aligned}$$

```

(E*h*tv)/6 + (E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(6*b*(nu^2 - 1)),
-(Gz*a)/12,
0,
-(Gz*a*b)/(9*h),
(E*tv)/(8*(nu - 1)), - (b*((Gz*a^2)/9 - (Gz*a^2*nu^2)/9 + (E*h*tv)/6 -
(E*h*nu*tv)/6))/(a*h*(nu^2 - 1)) - (E*a*tv)/(3*b*(nu^2 - 1)),
-(Gz*a)/6

-(Gz*b)/12,
(Gz*a)/6,
(Gz*b)/12,
-(Gz*a)/6, -(Gz*h*(2*a^2 - b^2))/(6*a*b),
-(Gz*b)/12,
(Gz*a)/12,
(Gz*b)/12,
-(Gz*a)/12, -(Gz*h*(a^2 + b^2))/(6*a*b),
-(Gz*b)/6,
(Gz*a)/12,
(Gz*b)/6,
-(Gz*a)/12, (Gz*h*(a^2 - 2*b^2))/(6*a*b),
-(Gz*b)/6,
(Gz*a)/6,
(Gz*b)/6,
-(Gz*a)/6, (Gz*h*(a^2 + b^2))/(3*a*b)];
end

```

Подпрограмма matrB.m

```

function B = matrB(x,y,a,b,h)
B =[-(b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (b/2 + y)/(a*b), 0,
0, 0, 0,-(b/2 + y)/(a*b), 0, 0, 0, 0
0,-(a/2 - x)/(a*b), 0, 0, 0, 0,-(a/2 + x)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (a/2 + x)/(a*b), 0,
0, 0, 0, (a/2 - x)/(a*b), 0, 0, 0
-(a/2 - x)/(a*b), -(b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0,-(a/2 + x)/(a*b), (b/2 - y)/(a*b), 0, 0,
0, (a/2 + x)/(a*b), (b/2 + y)/(a*b), 0, 0, 0, (a/2 - x)/(a*b), -(b/2 + y)/(a*b), 0, 0,
0
0, 0,-(b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (b/2 + y)/(a*b), 0,
0, 0, 0,-(b/2 + y)/(a*b), 0, 0
0, 0, 0,-(a/2 - x)/(a*b), 0, 0, 0, 0,-(a/2 + x)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (a/2 +
x)/(a*b), 0, 0, 0, 0, (a/2 - x)/(a*b), 0
0, 0,-(a/2 - x)/(a*b), -(b/2 - y)/(a*b), 0, 0, 0,-(a/2 + x)/(a*b), (b/2 - y)/(a*b),
0, 0, 0, (a/2 + x)/(a*b), (b/2 + y)/(a*b), 0, 0, 0, (a/2 - x)/(a*b), -(b/2 + y)/(a*b),
0
((a/2 - x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0,-((a/2 - x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0,-(b/2 -
y)/(a*b), ((a/2 + x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0,-((a/2 + x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0, (b/2 -
y)/(a*b), ((a/2 + x)*(b/2 + y))/(a*b*h), 0,-((a/2 + x)*(b/2 + y))/(a*b*h), 0, (b/2 +
y)/(a*b), ((b/2 + y)*(a/2 - x))/(a*b*h), 0,-((b/2 + y)*(a/2 - x))/(a*b*h), 0,-(b/2
+ y)/(a*b)
0, ((a/2 - x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0,-((a/2 - x)*(b/2 - y))/(a*b*h), -(a/2 -
x)/(a*b), 0, ((a/2 + x)*(b/2 - y))/(a*b*h), 0,-((a/2 + x)*(b/2 - y))/(a*b*h), -(a/2
+ x)/(a*b), 0, ((a/2 + x)*(b/2 + y))/(a*b*h), 0,-((a/2 + x)*(b/2 + y))/(a*b*h), (a/2
+ x)/(a*b), 0, ((b/2 + y)*(a/2 - x))/(a*b*h), 0,-((b/2 + y)*(a/2 - x))/(a*b*h), (a/2
- x)/(a*b)];
end

```

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ВНЕДРЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ
ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2016614064

**Расчет многослойных полимерных труб с учетом ползучести
материала**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего профессионального
образования «Ростовский государственный строительный
университет» (РГСУ) (RU)*

Авторы: *Языев Батыр Меретович (RU), Чепурненко Антон
Сергеевич (RU), Дудник Анастасия Евгеньевна (RU), Савченко
Андрей Андреевич (RU)*

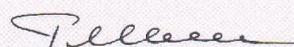
Заявка № **2016611241**

Дата поступления **17 февраля 2016 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **13 апреля 2016 г.**

Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

 **Г.П. Ивлиев**



Утверждаю
 директор строительного отдела
 ГК АКССстрой
 ИП Акопян В.Ф.


 16 апреля 2018 г.

ТЕХНИЧЕСКИЙ АКТ ВНЕДРЕНИЯ

результатов диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук А.А. Савченко «Моделирование реологических процессов и прогнозирование прочностных характеристик пластин из полимерных и композитных материалов».

Место внедрения	Ростовская обл., г. Аксай
Предмет внедрения	Пакет прикладных программ для расчета с учетом ползучести трехслойных панелей с пенополиуретановым наполнителем
Результаты внедрения	Результаты диссертационной работы А.А. Савченко, подтвержденные на численных моделях (на основе метода конечных элементов, метода конечных разностей), используются при расчете трехслойных панелей, применяемых в конструкциях стен и покрытий для сооружения объектов сельскохозяйственного назначения, пищевого производства, а также объектов, эксплуатируемых в агрессивной среде.

Представители заказчика:
 директор строительного отдела
 ГК АКССстрой
 Акопян В.Ф.



Исполнитель: аспирант кафедры
 «Сопротивление материалов»
 ДГТУ
 Савченко А.А. 